

УДК 533.6

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ А. Н. КРАЙКО

С. П. Баутин

Уральская государственная академия путей сообщения, 620034 Екатеринбург

Для системы уравнений газовой динамики сформулировано три начально-краевых задачи, последовательное решение которых дает решение задачи Крайко об изэнтропическом переходе из однородного состояния покоя в другое состояние покоя идеального газа с большим или меньшим значением плотности. Решение построено для плоских, цилиндрических и сферических слоев идеального газа. Доказано существование локально-аналитических решений.

Введение. В работе [1] для плоскосимметричного случая приведен пример составного течения газа, в котором с помощью двух центрированных волн и постоянного потока осуществляется переход из однородного состояния покоя газа (состояние 1) в другое состояние покоя (состояние 2). Указанное течение вызвано движением двух непроницаемых поршней. Доказано, что решений такого типа не существует в том случае, когда один из поршней остается в покое [1, с. 216].

В работе [2] рассмотрена задача об оптимальном движении непроницаемого поршня, совершающего максимальную работу при заданных ограничениях на перемещение и время перемещения. Для плоскосимметричного случая приведены результаты численных расчетов и построена аналогия между этим оптимальным движением поршня и известным движением в двумерном сверхзвуковом сопле максимальной тяги [3].

В работах [4–7] построены и используются, в том числе для описания неограниченной кумуляции газа, составные плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричные нестационарные течения газа, описывающие изэнтропический переход идеального газа из состояния 1 в состояние 2 с большим или меньшим значением плотности ρ (волна сжатия или разрежения соответственно). Эти течения отличаются от конфигурации, представленной в работе [1]. Конфигурация составного течения при безударном сжатии газа до конечной плотности, приведенная в [5, 7], также отличается от конфигурации, рассмотренной в [8]. В работе [8] исследуется конфигурация, в которой при сжатии газа до конечной плотности характеристики одного семейства пересекаются в точке, лежащей не на поршне, а на неподвижной границе сжатого слоя. В состоянии 2 плотность газа может быть постоянной, но тогда скорость газа будет отличной от нуля, а конфигурация течения повторять начальную конфигурацию течения, описанного в [1]. В работах [5, 7] рассмотрены течения, когда сжимающий поршень приходит в точку, из которой распространяется центрированная волна сжатия. Тогда в состоянии 2 плотность постоянна и скорость газа равна нулю. В [4–7] для раскрытия особенностей в решении приведены приближенные формулы, а построение течения “в целом” сведено к численному решению системы уравнений газовой динамики методом характеристик. Отметим, что решения задач о безударном сильном сжатии идеального газа неустойчивы по отношению к внешним воздействиям на газ [9].

Целью данной работы является формулирование трех начально-краевых задач и доказательство существования их локально-аналитических решений. Последовательное решение этих задач и дает решение задачи Крайко для плоских ($\nu = 0$), цилиндрических ($\nu = 1$) и сферических ($\nu = 2$) слоев идеального газа. Тем самым для $\nu = 0, 1, 2$ доказываемся,

что действием одного непроницаемого поршня массу газа за конечное время безударным способом можно перевести из состояния 1 в состояние 2. Также обсуждаются произвол, возникающий при решении задачи Крайко, и возможность неодномерных течений в этой задаче.

1. Начально-краевые задачи. Система уравнений газовой динамики инвариантна относительно сдвига по времени t , а также смены знака скорости газа и направления времени [10]. Поэтому без нарушения общности в задаче Крайко рассматривается только случай волны разрежения.

Для решения задачи Крайко необходимо исследовать изэнтропические течения идеального газа ($S = S_0$, где S — энтропия, $S_0 = \text{const} > 0$). Для простоты далее рассматривается политропное уравнение состояния $p = A^2(S)\rho^\gamma/\gamma$, где p — давление; $\gamma = \text{const} > 1$, без нарушения общности считается, что $A^2(S_0) = 1$. Однако все доказанные ниже теоремы легко переносятся на случай нормального газа с произвольным уравнением состояния $p = p(S, \rho)$, если функция $p(S_0, \rho)$ является аналитической в окрестности рассматриваемой точки $\rho = \rho_0$ и $p(S_0, \rho_0) > 0$, где $\rho_0 = \text{const} > 0$.

Для описания одномерных изэнтропических течений идеального политропного газа в исследуемой задаче Крайко рассматриваются система уравнений для скорости газа u и скорости звука c

$$c_t + uc_x + (\gamma - 1)c(u_x + \nu u/x)/2 = 0, \quad u_t + 2cc_x/(\gamma - 1) + uu_x = 0 \quad (1.1)$$

и уравнение для потенциала скорости газа $\Phi(t, x)$ [10]. Для описания особенности течения, подобного центрированной волне, с помощью преобразования Лежандра $\Phi = -\Psi + ux + (\gamma - 1)t$ делается переход от функции Φ к новой неизвестной функции $\Psi(t, u)$. Якобиан такого преобразования есть $J = -\Psi_{uu}$. Уравнение для функции Ψ имеет вид

$$\Psi_{tt}\Psi_{uu} - (\Psi_{tu} - u)^2 + c^2 + \nu uc^2\Psi_{uu}/\Psi_u = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $c^2 = (\gamma - 1)(\Psi_t - u^2/2)$; переход в пространство физических переменных осуществляется с помощью формулы $x = \Psi_u$, где $x = x_1$ при $\nu = 0$ и $x = \left(\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2\right)^{1/2}$ при $\nu = 1, 2$; t — время.

Для системы (1.1) и уравнения (1.2) сформулируем три начально-краевых задачи. Рассмотрим плоский, цилиндрический или сферический слой однородного газа ($\rho = \rho_0 = 1$), который в момент $t = 0$ покоится между двумя непроницаемыми стенками, расположенными в точках $O_1(x = x_0)$ и $A(x = x_*)$. Без нарушения общности считаем, что $x_* = 1$. Для определенности полагаем, что точка O_1 находится левее точки A ($x_0 < x_*$), но при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ — строго правее оси или центра симметрии соответственно ($x_0 > 0$).

ЗАДАЧА 1 (о выдвигании поршня). Пусть стенка выдвигается как непроницаемый поршень. В зависимости от способа выдвигания поршня возможны три конфигурации течения.

Пусть при $t \geq 0$ из точки A поршень выдвигается плавно (рис. 1). Его траектория (линия AB) задается уравнением $x = x_p(t)$ ($x_p(0) = x_*$, $x'_p(0) = 0$, $x''_p(0) > 0$). Тогда при малых $t \geq 0$ в области между неподвижной стенкой O_1O_2 и поршнем AB через звуковую характеристику AC ($x = x_* - t$) будут непрерывно склеены два течения. Область O_1AC (область СП на рис. 1) соответствует состоянию покоя газа, область BAC — течению, однозначно определяемому [9] из характеристической задачи Коши для уравнения (1.2):

$$\Psi(t, u)|_{u=0} = (x_* - t)/(\gamma - 1), \quad \Psi_u(t, u)|_{u=0} = x_* - t; \quad (1.3)$$

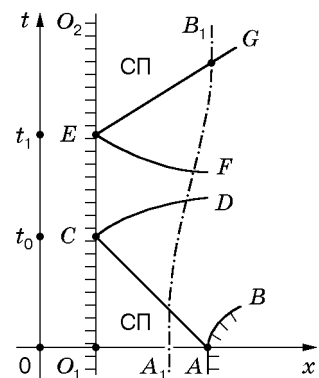


Рис. 1

$$\Psi_{uu}(t, u)|_{t=\eta(u)} = \eta'(u)[u - \Psi_{tu}(t, u)]|_{t=\eta(u)}. \quad (1.4)$$

Здесь $t = \eta(u)$ — функция, обратная к $u = x'_p(t)$. Уравнения (1.3) представляют собой условие непрерывного примыкания решения задачи (1.2)–(1.4) через характеристику AC к решению, соответствующему однородному состоянию покоя, а (1.4) — условие непротекания на поршне AB для функции $\Psi(t, u)$. Задача (1.2)–(1.4) является задачей 1.

Теорема 1. *Если функция $t = \eta(u)$ является аналитической в некоторой окрестности точки $u = 0$, то задача 1 имеет единственное аналитическое решение, определенное в некоторой окрестности любой точки $(t = t_*, u = 0)$ такой, что $x_* - t_* > 0$. При этом $J \neq 0$.*

Доказательство теоремы состоит из двух этапов. На первом этапе показывается, что задача 1 является характеристической задачей Коши стандартного вида [9], что обеспечивает существование аналитического решения в некоторой окрестности точки $(t = 0, u = 0)$. Устанавливается существование такой окрестности точки $(t = 0, u = 0)$, в которой $J \neq 0$. На втором этапе доказательства детально исследуется структура коэффициентов рядов, задающих решение задачи 1, и устанавливается [9], что решение существует в некоторой окрестности полуоси $u = 0$ при $t < x_*$ и для точек из этой окрестности $J \neq 0$.

Тем самым доказано, что в пространстве независимых переменных (t, x) у задачи о плавном выдвигании поршня из покоящегося однородного газа решение в классе кусочно-аналитических функций существует, единственно и определено в некоторой окрестности звуковой характеристики AC .

Пусть поршень выдвигается резко, причем скорость его движения не меньше, чем скорость истечения газа в вакуум: $x'_p(0) \geq 2/(\gamma - 1)$ (задача об истечении газа в вакуум [10]). В этом случае к однородному покою при малых $t \geq 0$ к звуковой характеристике AC при $\nu = 0$ будет примыкать простая центрированная волна Римана [10], а при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ — течение, аналогичное центрированной волне [9]. Это течение является решением задачи 1, в которой в качестве функции $t = \eta(u)$ надо взять константу $t = 0$. Тогда условие (1.4) примет вид $\Psi_{uu}(0, u) = 0$ и в пространстве (t, x) будет соответствовать условию мгновенного удаления стенки из точки A . Таким образом, для задачи об истечении газа в вакуум справедлива теорема 1, при этом $J \neq 0$ на всем указанном множестве точек, за исключением начала координат: $J|_{t=u=0} = 0$.

Третья возможная конфигурация в задаче 1 — быстрое, но не до создания вакуума выдвигание из точки A непроницаемого поршня: $0 < x'_p(0) < 2/(\gamma - 1)$. Для общих пространственных течений доказано [11, 12], что при аналитичности закона выдвигания поршня решение такой задачи существует в некоторой окрестности точки A , единственно в классе кусочно-аналитических функций и состоит из трех течений, разделенных звуковыми характеристиками. Одно из течений, расположенное в области O_1AC , соответствует однородному состоянию покоя. Второе является обобщением центрированной волны Римана и имеет конкретную особенность в начальный момент времени. Третье течение фактически представляет собой решение задачи о плавном выдвигании поршня из заданного течения и особенностей в некоторой окрестности точки A не имеет. Таким образом, и в третьем случае в некоторой окрестности характеристики AC определено аналитическое решение [11, 12].

Итак, при любом аналитическом законе выдвигания из точки A непроницаемого поршня решение, соответствующее волне разрежения, определяется однозначно, через звуковую характеристику AC непрерывно склеивается с решением, соответствующим состоянию исходного однородного покоя, и в некоторой окрестности точки $C(t = t_0, x = x_0)$ задается аналитическими функциями, где $t_0 = x_* - x_0$.

ЗАДАЧА 2 (об отражении волны разрежения от жесткой стенки). В решении задачи 1 скорость газа при $x = x_0$, $t > t_0$ строго меньше нуля, поэтому для него условие непротекания на стенке O_1O_2 выполняться не будет. Следовательно, в задаче 1 в результате взаимодействия течения и стенки O_1O_2 возникнет новое течение, отделенное от первого звуковой характеристикой CD из семейства характеристик C^+ (рис. 1). Функция $x = \varphi(t)$, задающая характеристику CD , и значения параметров газа на ней

$$c|_{x=\varphi(t)} = c_0(t), \quad u|_{x=\varphi(t)} = u_0(t) \quad (1.5)$$

однозначно определяются решением задачи 1 и в некоторой окрестности точки $t = t_0$ являются аналитическими функциями. При этом $\dot{\varphi}(t) = u_0(t) + c_0(t)$, $\varphi(t_0) = x_0$. Новое течение на характеристике CD должно удовлетворять условиям (1.5) непрерывного примыкания к решению задачи 1. На стенке O_1O_2 для этого течения должно выполняться условие непротекания

$$u|_{x=x_0} = 0. \quad (1.6)$$

Задача (1.1), (1.5), (1.6) является задачей 2.

Теорема 2. *Задача 2 в некоторой окрестности точки $(t = t_0, x = x_0)$ имеет единственное аналитическое решение.*

Для доказательства теоремы 2 вводятся новые независимые переменные $\chi = x - \varphi(t)$, $\tau = t$ (с якобианом, равным 1) и показывается, что в этих переменных задача 2 является характеристической задачей Коши стандартного вида, для которой справедлив аналог теоремы Ковалевской [9]. Рассматриваемая задача есть частный случай задачи о плавном движении поршня в газ, так как скорость поршня (в данном случае нулевая у неподвижной стенки O_1O_2) в момент $t = t_0$ совпадает со скоростью газа в точке (в данном случае в точке C), одновременно лежащей и на поршне, и на заданной звуковой характеристике CD . Решение задачи 2, определенное по теореме 2 в некоторой окрестности точки C , необходимо рассматривать только в области DCE (рис. 1). Это течение возникает в результате взаимодействия исходной волны разрежения (решения задачи 1) с непроницаемой стенкой O_1O_2 . Оно определяется законом $x = x_p(t)$ первоначального выдвигания поршня и местом расположения стенки O_1O_2 , т. е. шириной исходного слоя газа. Величина $x_* - x_0$ является вторым произвольным элементом в рассматриваемой задаче Крайко.

ЗАДАЧА 3. На стенке O_1O_2 выбирается какая-либо точка E с координатами (t_1, x_0) , $t_1 > t_0$ (рис. 1), лежащая в области определения решения задачи 2. Точка E является последним, третьим произвольным элементом в рассматриваемой задаче Крайко. В выбранной точке E однозначно определяется значение скорости звука газа c_1 в решении задачи 2: $c(t_1, x_0) = c_1$, а следовательно, и значение плотности газа ρ_1 в этой точке E : $\rho_1 = c_1^{2/(\gamma-1)}$. Таким образом, значение $\rho = \rho_1$ является последним произвольным элементом, который в совокупности с функцией $x = x_p(t)$ и значением $x_* - x_0$ однозначно определяет решение задачи Крайко в случае волны разрежения.

Выбор точки E также единственным образом определяет аналитические функции $x = \varphi^-(t)$ и $x = \varphi^+(t) \equiv x_0 + c_1(t - t_1)$ и соответственно траектории звуковых характеристик EF семейства C^- течения, отвечающего области DCE (решения задачи 2), и EG (прямая линия) семейства C^+ состояния однородного покоящегося газа с плотностью ρ_1 , соответствующего области O_2EG (рис. 1). Далее единственным образом определяются аналитические функции

$$c|_{x=\varphi^-(t)} = c_1^-(t), \quad c_1^-(t_1) = c_1, \quad u|_{x=\varphi^-(t)} = u_1^-(t), \quad u_1^-(t_1) = 0; \quad (1.7)$$

$$c|_{x=\varphi^+(t)} = c_1^+(t) \equiv c_1, \quad u|_{x=\varphi^+(t)} = u_1^+(t) \equiv 0, \quad (1.8)$$

которые задают соответственно значения параметров состояния газа на характеристике EF течения, соответствующего области DCE , и значения параметров состояния однородного покоящегося газа, соответствующего области O_2EG . При этом $\dot{\varphi}^\pm(t) = u_1^\pm \pm c_1^\pm(t)$, $\varphi^\pm(t_1) = x_0$.

Итак, задача 3 сводится к решению задачи Гурса (1.1), (1.7), (1.8) в области FEG (рис. 1).

Из-за нелинейности системы (1.1) для доказательства существования решения задачи 3 невозможно воспользоваться результатами, приведенными в [13] для полунелинейных систем. В случае $\nu = 0$ при описании взаимодействия двух простых волн система (1.1) допускает точную линеаризацию [10]. Эти результаты также нельзя использовать, так как при $\nu = 0$ искомое в области FEG течение само является простой волной как примыкающее к однородному состоянию покоя. Существование решения задачи 3, вероятно, можно доказать, используя методику, примененную в [14] для случая потенциальных конических течений, зависящих от x_1/t , x_2/t .

Однако ниже для доказательства существования решения задачи 3 последняя сводится к задаче о распаде слабого разрыва [15] (см. также [16]), для которой в классе кусочно-аналитических функций доказаны соответствующие теоремы. Этот подход помимо доказательства существования решения позволяет исследовать неоднородные течения.

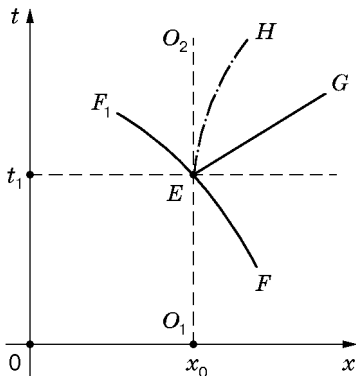


Рис. 2

Для склеивания решения задачи 2 с другими решениями его можно рассматривать только в некоторой части области определения, например в области $DCEF$. Однако решение задачи 2, как отмечалось выше, определено в некоторой окрестности точки C . Поскольку точка E выбрана в этой области, то и у нее существует некоторая окрестность $\Omega = \{(t - t_1)^2 + (x - x_0)^2 < \varepsilon^2, \varepsilon = \text{const} > 0\}$, в которой определено и задается аналитическими функциями решение задачи 2. Следовательно, характеристика FE может быть продолжена для $x \leq x_0$. Рассматриваются характеристика FF_1 (рис. 2), на которой также заданы соответствующие значения газодинамических параметров решения задачи 2, и ее часть EF_1 . Существование аналитического решения задачи 3 в некоторой окрестности точки E достаточно установить для случая, когда в качестве пересекающихся характеристик, несущих соответствующие начальные данные, берутся линии EF_1 и EG (рис. 2). Решение этой задачи в области FEG является составляющей решения задачи Крайко. При таком подходе решение задачи 3 эквивалентно решению следующей задачи о распаде слабого разрыва.

Пусть при $t = t_1$, $x \leq x_0$ (рис. 2) параметры газа

$$U(t, x)|_{t=t_1} = U_{00}^-(x), \quad (1.9)$$

а при $t = t_1$, $x \geq x_0$ —

$$U(t, x)|_{t=t_1} = U_{00}^+(x), \quad (1.10)$$

удовлетворяющие условию непрерывности в точке $x = x_0$

$$U_{00}^-(x_0) = U_{00}^+(x_0).$$

В (1.9), (1.10) $U = \{c, u\}$. Требуется найти распределения газодинамических параметров при $t \geq t_1$.

Теорема 3. В случае аналитичности функций (1.9), (1.10) в некоторой окрестности точки $x = x_0$ поставленная задача о распаде слабого разрыва при $t \geq t_1$ в некоторой окрестности точки $(t = t_1, x = x_0)$ имеет единственное кусочно-аналитическое решение.

Теорема 3 является частным случаем доказанной в [15] теоремы. При ее доказательстве по начальным данным (1.9), (1.10) с помощью теоремы Ковалевской устанавливается существование в некоторой окрестности точки E двух фоновых течений, заданных аналитическими функциями $U_0^-(t, x)$ и $U_0^+(t, x)$. Пусть звуковые характеристики C^- и C^+ (соответственно линии EF_1 и EG) заданы аналитическими функциями $x = \varphi^-(t)$, $x = \varphi^+(t)$ ($\varphi^-(t_1) = \varphi^+(t_1) = x_0$). Значения газодинамических параметров фоновых течений на этих характеристиках также являются аналитическими функциями и удовлетворяют условию непрерывности в точке E

$$U_0^-(t, x)|_{x=\varphi^-(t)} = U_1^-(t), \quad U_0^+(t, x)|_{x=\varphi^+(t)} = U_1^+(t), \quad U_1^-(t_1) = U_1^+(t_1). \quad (1.11)$$

Если в качестве фоновых течений берутся соответственно решение задачи 2 и решение, соответствующее покоящемуся однородному газу ($\rho = \rho_1$), то правые части равенств (1.11) будут совпадать с правыми частями равенств (1.7), (1.8). Следовательно, решение задачи 3 эквивалентно решению поставленной задачи о распаде слабого разрыва. Для решения последней вводится заранее неизвестная линия EH (рис. 2), проходящая через точку E и задаваемая неопределенной функцией $x = \psi(t)$. Линия EH разбивает область F_1EG на области F_1EH и HEG . В этих областях определяются решения системы (1.1) $U^-(t, x)$ и $U^+(t, x)$ соответственно. Эти решения на рассматриваемых характеристиках удовлетворяют условиям

$$U^-(t, x)|_{x=\varphi^-(t)} = U_1^-(t), \quad U^+(t, x)|_{x=\varphi^+(t)} = U_1^+(t),$$

т. е. для $U^-(t, x)$ должны выполняться условия (1.7), для $U^+(t, x)$ — условия (1.8). Кроме того, требуется, чтобы на линии EH выполнялось равенство

$$U^-(t, x)|_{x=\psi(t)} = U^+(t, x)|_{x=\psi(t)},$$

из которого следует, что линия EH является контактной линией, на которой совпадают скорости газа и давления двух искомым течений $U^-(t, x)$, $U^+(t, x)$. Для неизвестной функции $x = \psi(t)$ ставится задача Коши

$$\dot{\psi}(t) = u^+(t, x)|_{x=\psi(t)}, \quad \psi(t_1) = x_0.$$

Таким образом, задача о распаде слабого разрыва формулируется как начально-краевая задача. Доказано [15], что в некоторой окрестности точки E существует и единственно решение рассматриваемой задачи для пяти неизвестных функций $c^-(t, x)$, $u^-(t, x)$, $c^+(t, x)$, $u^+(t, x)$, $\psi(t)$. Поскольку для изэнтропических одномерных течений контактная линия не является характеристикой, задание на этой линии газодинамических параметров однозначно определяет течение газа в некоторой ее окрестности. Поэтому из совпадения решений $U^-(t, x)$ и $U^+(t, x)$ на EH следует их совпадение и в некоторой ее окрестности. Таким образом, оба течения в областях существования задаются одними и теми же аналитическими функциями $U^-(t, x) \equiv U^+(t, x)$, являющимися решением задачи 3, определенным в некоторой окрестности точки E . Следовательно, решение задачи Крайко существует и в области FEG (см. рис. 1).

Возьмем на характеристике EG (см. рис. 1) некоторую точку, лежащую в области существования решения задачи Крайко. Из нее построим траекторию соответствующей частицы газа (штрихпунктирная линия A_1B_1). Учитывая значения первых коэффициентов рядов, задающих решения задач 1–3, можно доказать, что вся линия A_1B_1 лежит в области существования решения этих задач. Эта линия принимается за траекторию движения нового непроницаемого поршня. В точках пересечения характеристик EF , CD и CA

решение будет иметь слабый разрыв (разрыв у производных не ниже второго порядка). Следовательно, установлено существование решения задачи Крайко в некоторой области $O_1A_1B_1O_2$ (см. рис. 1). Тем самым доказано, что действием непроницаемого поршня массу газа за конечное время безударным способом можно перевести из одного состояния однородного покоя в другое.

2. Обсуждение результатов. Доказанные теоремы имеют локальный характер, и поэтому на их основе нельзя точно определить ограничение сверху для массы газа, для которой возможно существование решения задачи Крайко. Можно предположить, что при $\nu = 0$ такого ограничения не будет. Однако для строгого определения ограничения на массу (как при $\nu = 0$, так и при $\nu = 1, \nu = 2$) нужно построить течение в целом. Для одномерных течений приближенные решения системы уравнений газовой динамики могут быть построены методом характеристик. С использованием доказанных локальных теорем существования решений можно ставить начально-краевые задачи, определять возникающий при этом произвол и последовательность решения этих задач.

Возникающий при постановке начально-краевых задач произвол позволяет рассматривать различные задачи оптимизации (см., например, [5, 7]). Возможно, что в задаче Крайко с волной разрежения заданная плотность ρ_1 быстрее всего может быть достигнута, если с решением, соответствующим исходному состоянию покоя, при $\nu = 0$ склеить центрированную волну разрежения, а при $\nu = 1, 2$ — ее аналоги, описанные в теореме 1.

Предложенный подход может быть обобщен на случай, когда газ в начальный и конечный моменты заполняет цилиндрические и сферические области ($x_0 = 0$). В этом случае условие непротекания на стенке $u|_{O_1O_2} = 0$ заменяется условием симметрии течения на оси ($\nu = 1$) или в центре ($\nu = 2$) $u|_{x=0} = 0$. В [4–7] рассмотрены конфигурации возникающих течений, аналогичные рассмотренным в данной работе (на рис. 1 ось $x = 0$ совпадает с прямой O_1O_2). Однако при доказательстве существования решений в случае $x_0 = 0$ возникают трудности в точке C характеристики AC , лежащей на оси симметрии ($\nu = 1$) или в центре симметрии ($\nu = 2$). Как показано в работе [17], выводящие с прямой AC первые производные газодинамических параметров $(\partial u / \partial x)|_{AC}$ и $(\partial \rho / \partial x)|_{AC}$ при $t \rightarrow x_* - 0$ обращаются в бесконечность, т. е. в точке $C(t = x_*, x = 0)$ имеет место градиентная катастрофа. Эта особенность в точке C возникает при фокусировании на ось или в центр симметрии как волны разрежения, так и волны сжатия. В настоящее время для цилиндрически- и сферически-симметричных нестационарных течений не имеется каких-либо общих доказанных утверждений о конфигурациях течений или их свойствах после достижения слабым разрывом оси (центра) симметрии. В тех случаях (см. [18, 19]), для которых имеется математически строго обоснованное решение задачи о фокусировании волны сжатия на ось (в центр) симметрии, от точки C отражается не звуковая характеристика, а ударная волна.

Для задач 1–3 имеются обобщения на случай неодномерных течений нормального газа (см., например, работу [9] и библиографию к ней). Задача 3 эквивалентна соответствующей задаче о распаде слабого разрыва и в случае многомерных течений. Поэтому при решении задачи Крайко в неодномерном случае наибольшую трудность будет представлять построение в классе неодномерных изэнтропических потенциальных течений решения задачи 2, обладающего следующими свойствами. В момент $t = t_1$ на неподвижной непроницаемой стенке, во-первых, плотность газа должна быть постоянной, во-вторых, нормальная и касательная составляющие вектора скорости газа должны обращаться в нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Рылов А. И. Вариационная задача одномерной нестационарной газовой динамики // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 4. С. 171–175.
3. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979.
4. Крайко А. Н. О свободном нестационарном расширении идеального газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. № 4. С. 155–163.
5. Крайко А. Н. Вариационная задача об одномерном изэнтропическом сжатии идеального газа // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 35–51.
6. Крайко А. Н. Асимптотические закономерности нестационарного расширения идеального газа в пустоту // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 70–80.
7. Крайко А. Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 1000–1007.
8. Сидоров А. Ф. Безударное сжатие баротропного газа // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55, вып. 5. С. 769–779.
9. Баутин С. П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1997.
10. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
11. Тешуков В. М. Центрированные волны в пространственных течениях газа // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1979. Вып. 39. С. 102–118.
12. Тешуков В. М. Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // ПМТФ. 1982. № 4. С. 98–106.
13. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
14. Тешуков В. М. Задача Гурса для уравнения плоских потенциальных конических течений газа // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 2. С. 303–306.
15. Тешуков В. М. Пространственная задача о распространении контактного разрыва в идеальном газе // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 32. С. 82–94.
16. Баутин С. П. Сведение некоторых задач газовой динамики к характеристической задаче Коши стандартного вида // Аналитические и численные методы исследования задач механики сплошной среды: Сб. науч. тр. Свердловск: Урал. науч. центр АН СССР, 1987. С. 4–22.
17. Jeffrey A. The development of jump discontinuities in nonlinear hyperbolic systems of equations in two independent variables // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. V. 14, N 1. P. 27–37.
18. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
19. Баутин С. П., Казаков А. Л. Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии с конечной скоростью // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 465–474.

Поступила в редакцию 3/XII 1998 г.