УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УСИЛЕННОЙ ПОПЕРЕЧНЫМИ РЕБРАМИ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА С ТЕКУЩЕЙ В НЕЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ф. С. Латифов, Ф. А. Сейфуллаев*, Ш. Ш. Алыев

Азербайджанский архитектурно-строительный университет, AZ1073 Баку, Азербайджан
* Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан
E-mails: flatifov@mail.ru, a.seyfullayev@yahoo.com, sakir.aliyev62@mail.ru

Представлены результаты определения частот свободных колебаний подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической конструктивно-анизотропной оболочки из стеклопластика, внутри которой течет жидкость. На торцах оболочки ставятся граничные условия Навье. Результаты вычислений собственных частот колебаний представлены в виде зависимостей частоты от угла намотки стекловолокна и скорости потока жидкости при различных значениях параметров волнообразования и параметров, характеризующих геометрические размеры оболочки.

Ключевые слова: анизотропная подкрепленная ребрами оболочка, свободные колебания, собственные частоты колебаний.

DOI: 10.15372/PMTF20160415

При проектировании тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в авиационной, ракетно-космической технике и различных областях промышленности, важной задачей является динамический расчет напряженно-деформированного состояния этих конструкций. При исследовании динамики оболочек необходимо определять собственные частоты и формы малых колебаний, причем наибольший интерес представляют частоты из нижней части спектра. Для увеличения жесткости тонкостенная часть оболочки подкрепляется ребрами, что существенно повышает ее прочность при незначительном увеличении массы конструкции даже в том случае, если ребра имеют малую высоту. Результаты определения собственных частот осесимметричных колебаний ортотропных гладких цилиндрических оболочек в бесконечной упругой среде, заполненной жидкостью, представлены в работах [1, 2]. Исследованию устойчивости и колебаний подкрепленных изотропных оболочек при статическом и динамическом нагружении посвящена работа [3]. Собственные колебания в бесконечной упругой среде изотропной цилиндрической оболочки, усиленной продольной и перекрестной системами ребер, с текущей в ней жидкостью рассмотрены в [4–7].

В настоящей работе представлены результаты определения частот свободных колебаний подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической конструктивно-анизотропной оболочки из стеклопластика, внутри которой течет жидкость. Предполагается, что кольцевые ребра расположены на внешней поверхности оболочки на равных расстояниях друг от друга.

Постановка задачи. Выражение для полной энергии упругой деформации анизотропной цилиндрической оболочки, нагруженной внешними силами, имеет вид

$$
\begin{aligned}
J = \frac{1}{2} R^2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} (N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} - M_{11}\chi_{11} - M_{22}\chi_{22} - M_{12}\chi_{12})\, dx\, dy + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big[E_j F_j \Big(\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big)^2 + E_j J_{yj} \Big(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}\Big)^2 + E_j J_{zj} \Big(\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}\Big)^2 + G_j J_{\text{кр}j} \Big(\frac{\partial \varphi_{\text{кр}j}}{\partial x}\Big)^2 \Big]\, dx + \\
+ \rho_0 h \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial t}\Big)^2 \Big]\, dx\, dy - \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{y_1}^{y_2} q_z w\, dx\, dy + \\
+ \sum_{j=1}^{k_2} \rho_j F_j \int\limits_{y_1}^{y_2} \Big[\Big(\frac{\partial u_j}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_j}{\partial t}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w_j}{\partial t}\Big)^2 + \frac{J_{\text{кр}j}}{F_j} \Big(\frac{\partial \varphi_{\text{кр}j}}{\partial t}\Big)^2 \Big]\, dy. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Выражения для внутренних сил и моментов запишем в виде

$$
N_{ij} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij})\, dz, \qquad M_{ij} = -\int\limits_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z\, dz, \qquad (2)
$$

где

$$
w_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} + B_{16}\chi_{12}, \qquad w_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{26}\chi_{12},
$$
$$
w_{21} = w_{12} = B_{16}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{66}\chi_{12}.
$$

С учетом (2) напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в срединной поверхности определяются следующим образом:

$$
\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + B_{16}\varepsilon_{12}, \qquad \sigma_{22} = B_{12}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{26}\varepsilon_{12},
$$
$$
\sigma_{12} = B_{16}\varepsilon_{11} + B_{26}\varepsilon_{22} + B_{66}\varepsilon_{12},
$$
$$
\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},
$$
$$
\chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \chi_{12} = -2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}.
$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолокна и определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= b_{11}\cos^4\varphi + b_{22}\sin^4\varphi + (b_{66} + 0{,}5 b_{12})\sin^2 2\varphi, \\
B_{22} &= b_{11}\sin^4\varphi + b_{22}\cos^4\varphi + (b_{66} + 0{,}5 b_{12})\sin^2 2\varphi, \\
B_{12} &= (b_{11} + b_{22} - 4b_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + b_{12}(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi), \\
B_{66} &= -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + b_{66}\cos^2 2\varphi, \\
B_{26} &= (1/2)(b_{22}\cos^2\varphi - b_{11}\sin^2\varphi)\sin 2\varphi - (1/6)(b_{12} + 2b_{66})\sin 4\varphi, \\
B_{16} &= (1/2)(b_{22}\sin^2\varphi - b_{11}\cos^2\varphi)\sin 2\varphi - (1/6)(b_{12} + 2b_{66})\sin 4\varphi.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

В (1)–(3) b_{11}, b_{22}, b_{12}, b_{66} — основные модули упругости ортотропного материала; φ — угол между направлением намотки стекловолокна и окружным направлением; R — радиус срединной поверхности оболочки; h — толщина оболочки; u, v, w — составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки; x_1, x_2 — координаты криволинейных краев оболочки; q_z — давление жидкости на оболочку; F_j, J_{zj}, J_{yj}, $J_{\text{кр}j}$ — площадь и моменты инерции поперечного сечения j-го поперечного стержня относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; E_j, G_j — модули упругости и сдвига материала j-го поперечного стержня соответственно; t — время; $t_1 = \omega_0 t$; $\omega_0 = \sqrt{b_{11}/[(1-\nu^2)\rho_0 R^2]}$; ρ_0, ρ_i — плотности материалов, из которых изготовлены оболочка и j-й поперечный стержень соответственно.

Уравнения движения подкрепленной кольцевыми ребрами и нагруженной радиальными силами анизотропной оболочки с движущейся в ней жидкостью получены на основе принципа стационарности действия Остроградского — Гамильтона

$$\delta W = 0, \tag{4}$$

где $W = \int\limits_{t'}^{t''} L\,dt$ — действие по Гамильтону; L — функция Лагранжа; t', t'' — заданные произвольные моменты времени.

Полагая, что скорость потока равна U и возмущения этой скорости малы, используем волновое уравнение для потенциала возмущенных скоростей $\tilde\varphi$ [8]

$$\Delta\tilde\varphi - \frac{1}{a_0^2}\Big(\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial t^2} + 2U\,\frac{\partial^2\tilde\varphi}{R\,\partial\xi\,\partial t} + U^2\,\frac{\partial^2\tilde\varphi}{R^2\,\partial\xi^2}\Big) = 0. \tag{5}$$

На поверхности контакта оболочка — жидкость выполняется условие непрерывности радиальных скоростей и давлений. Условие непроницаемости стенки оболочки имеет вид [8, 9]

$$v_r\Big|_{r=R} = \frac{\partial\tilde\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\Big(\omega_0\,\frac{\partial w}{\partial t_1} + U\,\frac{\partial w}{R\,\partial\xi}\Big). \tag{6}$$

Выражение для радиального давления жидкости на оболочку записывается в виде

$$q_z = -p\big|_{r=R}. \tag{7}$$

Дополняя выражение для полной энергии оболочки (1) и уравнение движения жидкости (5) контактными условиями (6), (7), получаем задачу о собственных колебаниях подкрепленной поперечными ребрами анизотропной цилиндрической оболочки с текущей в ней жидкостью.

Решение задачи о собственных колебаниях оболочки. Торцы оболочки полагаются шарнирно опертыми, допускается их смещение в продольном направлении, смещения в окружном направлении полагаются равными нулю. Такие граничные условия называются условиями Навье [10]. Таким образом, при $x = 0$ и $x = L_1$ $v = 0$, $w = 0$, $M_x = 0$, $N_x = 0$. Компоненты вектора перемещений срединной поверхности оболочки будем искать в виде

$$\begin{gathered} u = u_0\cos\chi\xi\cos n\theta\sin\omega_1 t_1, \qquad v = v_0\sin\chi\xi\sin n\theta\sin\omega_1 t_1, \\ w = w_0\sin\chi\xi\cos n\theta\sin\omega_1 t_1. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь u_0, v_0, w_0 — неизвестные постоянные; L_1 — длина оболочки; M_x — изгибающий момент; N_x — продольное усилие; χ, n — волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно.

Потенциал возмущенных скоростей $\tilde{\varphi}$ определяется по формуле

$$\tilde{\varphi}(\xi, r, \theta, t_1) = f(r) \cos n\theta \cos n\theta \cos \omega_1 t_1. \tag{9}$$

Используя (9), из (6) и (5) получаем

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi} = -\Phi_{\alpha n}\Big(\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t_1} + U \frac{\partial w}{R\partial \xi}\Big), \\ p = \Phi_{\alpha n}\rho_m\Big(\omega_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + 2U\omega_0 \frac{\partial^2 w}{R\, \partial \xi\, \partial t_1} + U^2 \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial\, \xi^2}\Big), \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$\Phi_{\alpha n} = \begin{cases} I_n(\beta r)/I_n'(\beta r), & M_1 < 1, \\ J_n(\beta_1 r)/J_n'(\beta_1 r), & M_1 > 1, \\ R^n/(nR^{n-1}), & M_1 = 1, \end{cases}$$

$M_1 = (U{+}\omega_0 R\omega_1/\alpha)/a_0$; $\beta^2 = R^{-2}(1{-}M_1^2)\chi^2$; $\beta_1^2 = R^{-2}(M_1^2{-}1)\chi^2$; I_n — модифицированные функции Бесселя первого рода порядка n; J_n — функции Бесселя первого рода порядка n.

Далее условие (7) заменяется условием $q_z = -p$ (p — давление, определяемое по формуле (10)). С учетом (8) выражение для давления p можно представить в виде

$$p = \frac{\rho_m \Phi_{\alpha n}}{\rho_0 \omega_0^2 h} \left(\omega_0^2\omega_1^2 + 2\omega_0\omega_1\chi U + \chi^2 U^2\right) w. \tag{11}$$

После подстановки (11), (8) в (4) задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1}u_0 + a_{i2}v_0 + a_{i3}w_0 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{12}$$

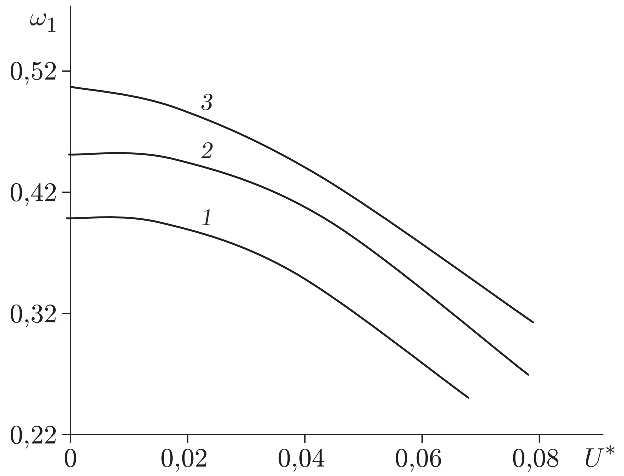

Рис. 1

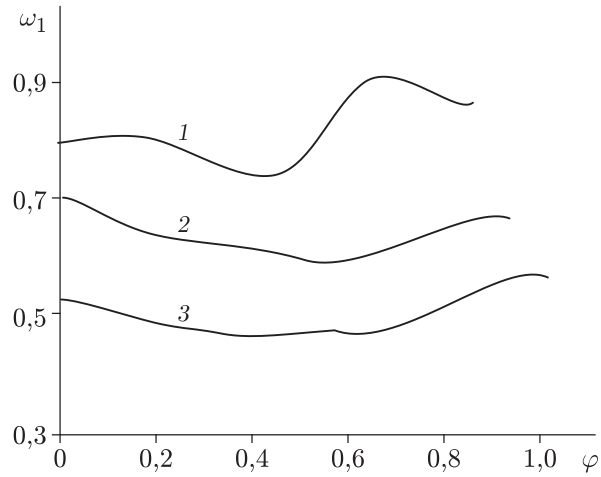

Рис. 2

Рис. 1. Зависимость частоты колебаний от скорости потока в подкрепленной системой поперечных ребер цилиндрической оболочке при $\chi = 1$, $n = 4$, $\varphi = 0{,}55$: *1* — $b_{11}/b_{22} = 0{,}75$, *2* — $b_{11}/b_{22} = 1{,}00$, *3* — $b_{11}/b_{22} = 1{,}25$

Рис. 2. Зависимость частоты свободных колебаний от угла намотки стекловолокна φ при $\chi = 1$, $n = 4$: *1* — $h/R = 0{,}001$, *2* — $h/R = 0{,}002$, *3* — $h/R = 0{,}004$

Выражения для коэффициентов a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} $(i = 1, 2, 3)$ имеют громоздкий вид, поэтому в данной работе не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (12) третьего порядка существует лишь в том случае, если ее главный определитель равен нулю. В результате определение частоты ω_1 сводится к решению трансцендентного уравнения.

Ниже приведены результаты вычислений собственной частоты ω_1.

Приняты следующие геометрические и физические параметры подкрепленной оболочки из тканевого стеклопластика [10] и жидкости: $\rho_0/\rho_m = 0{,}105$, $\rho_0 = \rho_j = 1850$ кг/м^3, $L_1 = 10^4$ мм, $b_{11} = 18{,}3$ ГПа, $b_{12} = 2{,}77$ ГПа, $b_{22} = 25{,}2$ ГПа, $b_{66} = 3{,}5$ ГПа, $\xi_1 = 1$, $h_j = 1{,}39$ мм, $R = 160$ мм, $h = 0{,}45$ мм, $F_j = 5{,}75$ мм^2, $I_{xj} = 19{,}9$ мм^4, $I_{\text{кр}j} = 0{,}48$ мм^4, $k_2 = 20$, $E_j = b_{11}$.

На рис. 1 показана зависимость частоты ω_1 от относительной скорости потока $U^* = U/c$ $(c = \omega_0 R)$. Видно, что увеличение скорости приводит к уменьшению частоты колебаний системы.

На рис. 2 представлена зависимость частоты от угла намотки при различных значениях отношения h/R. Видно, что отношение h/R оказывает существенное влияние на зависимость $\omega_1(\varphi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сейфуллаев Ф. А.** Асимптотический анализ собственных частот осесимметрических колебаний ортотропных цилиндрических оболочек в бесконечной упругой среде, заполненной жидкостью // Механика и машиностроение. 2004. № 4. С. 33–34.
2. **Latifov F. S., Seyfullayev F. A.** Asymptotic analysis of oscillation eigenfrequency of orthotropic cylindrical shells in infinite elastic medium filled with liquid // Trans. NAS Acad. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 2004. V. 24, N 1. P. 227–230.
3. **Амиро И. Я.** Ребристые цилиндрические оболочки / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий, П. С. Поляков. Киев: Наук. думка, 1973.
4. **Алиев Ф. Ф.** Собственные колебания в бесконечной упругой среде продольно подкрепленной цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Механика и машиностроение. 2006. № 1. С. 3–5.
5. **Алиев Ф. Ф.** Собственные колебания в бесконечной упругой среде, усиленные перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Механика и машиностроение. 2007. № 2. С. 10–12.
6. **Латифов Ф. С., Сулейманова С. Г.** Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженных осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненных средой // Механика машин, механизмов и материалов. 2009. № 1. С. 59–62.
7. **Сулейманова С. Г.** Свободные колебания продольно подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки с заполнителем // Тр. Ин-та математики и механики НАН Азербайджана. 2007. Т. 27. С. 135–140.
8. **Вольмир С. А.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
9. **Латифов Ф. С.** Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999.
10. **Босяков С. М., Чживэй В.** Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 3. С. 24–27.

Поступила в редакцию 15/IV 2015 г.