

УДК 532.526

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ НАД ДВУХСЛОЙНЫМ ПОДАТЛИВЫМ ПОКРЫТИЕМ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

А. Э. Даржаин^{*,**}, А. В. Бойко^{***,****}, В. М. Кулик^{*****},
А. П. Чупахин^{*,**}

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

** Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия

*** Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия

**** Тюменский государственный университет, 625003 Тюмень, Россия

***** Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: darzhain@gmail.com, boiko@itam.nsc.ru, vkulik@itp.nsc.ru, chupakhin@hydro.nsc.ru

Представлены результаты исследования в линейной постановке устойчивости пограничного слоя Блазиуса над двухслойным податливым покрытием. В расчетах используются экспериментальные параметры вязкоупругости реального покрытия, показывающие зависимости его модуля упругости и коэффициента потерь от частоты. Проведены параметрические исследования влияния толщин слоев покрытия и скорости внешнего потока на устойчивость течения, в частности на критическое число Рейнольдса. Обнаружены области немонотонности критического числа Рейнольдса, позволяющие определить оптимальные толщины верхнего и нижнего слоев для интенсивного взаимодействия с потоком. Дано объяснение этого эффекта.

Ключевые слова: податливые покрытия, пограничный слой, гидродинамическая неустойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20190404

Введение. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных исследованию гидродинамической устойчивости пограничных слоев над вязкоупругими покрытиями [1–4]. Используются различные идеализированные модели этих покрытий. Можно выделить два общих подхода к построению соответствующих моделей. В первом из них покрытие представляется в виде податливой стенки и моделируется тонкой оболочкой, однако такой подход не позволяет рассматривать динамику возмущений внутри покрытий. При другом подходе рассматривается динамика возмущений в системе, состоящей из вязкоупругого покрытия и жидкости, движущейся над ним [3, 4]. В такой модели отсутствуют недостатки предыдущего подхода, однако при решении задачи устойчивости требуются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 17-11-01156). Экспериментальные данные о покрытиях получены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-08-00761).

© Даржаин А. Э., Бойко А. В., Кулик В. М., Чупахин А. П., 2019

большие вычислительные ресурсы, что ограничивает ее использование. С развитием вычислительной техники и численных методов этот фактор перестал быть существенным. Для практического использования результатов такого расчета необходимо знать динамические вязкоупругие свойства материалов реальных покрытий.

Предположим, что вязкоупругие свойства материала описываются моделью Кельвина — Фойгта [3], в отсутствие анизотропии связывающей напряжения τ и деформации ε в вязкоупругой среде следующим образом:

$$\tau(t) = E\varepsilon(t) + d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (1)$$

(E — вещественный модуль упругости; d — вязкость). Рассматривая гармонические возмущения

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-i\omega t},$$

уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\tau_\omega}{\varepsilon_0} = E(1 - i\mu),$$

где $\mu = \omega d/E$ — коэффициент потерь; $\tau_\omega = \tau e^{i\omega t}$. В этой модели должны быть заданы эмпирические зависимости $E(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Такие данные получены лишь в последние годы для некоторых материалов [5–8].

С использованием эмпирических зависимостей для модуля упругости и коэффициента потерь [5–8] в работе [4] проведены расчеты устойчивости пограничного слоя Блазиуса над однослойными податливыми покрытиями, показано, что существует оптимальная толщина покрытий, при которой взаимовлияние покрытия и потока максимально, и отмечена целесообразность рассмотрения двухслойных покрытий, так как более мягкие покрытия с относительно небольшим модулем упругости, оказывающие влияние на устойчивость потока, подвержены риску получения дефектов (например, царапин) со стороны потока. В этом случае более жесткое, но тонкое покрытие при правильном подборе его характеристик может служить защитой, незначительно влияющей на взаимодействие второго слоя с потоком.

Постановка задачи. Рассмотрим пограничный слой Блазиуса над плоской пластиной. Пусть начало координат соответствует положению передней кромки пограничного слоя. Рассмотрим плоское течение вязкой несжимаемой жидкости над двухслойным податливым покрытием конечной толщины, описываемое системой уравнений Навье — Стокса [9]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta U; \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \Delta V; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где x, y — продольная и поперечная к поверхности покрытия декартовы координаты; U, V — продольная и поперечная к поверхности покрытия компоненты скорости потока; P — давление; ρ_f — плотность жидкости; ν — кинематическая вязкость жидкости; Δ — двумерный оператор Лапласа.

Введем следующие обозначения для покрытия. Нижние индексы 1, 2 соответствуют номеру слоя покрытия: первое покрытие будем считать верхним, контактирующим

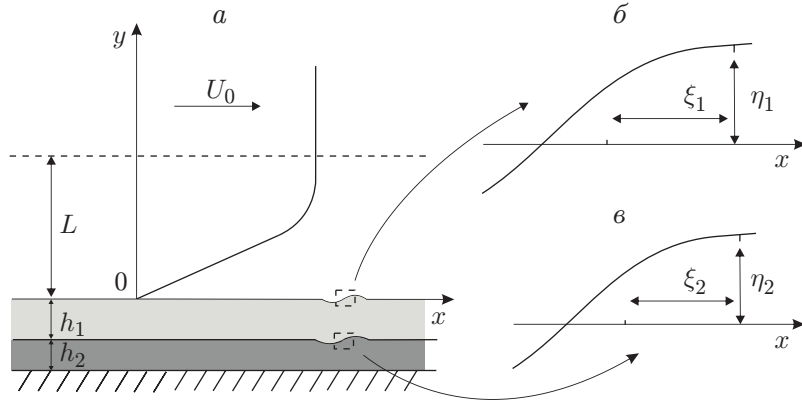


Рис. 1. Схема течения потока над двухслойным покрытием (а) и увеличенные области деформации поверхностей верхнего (б) и нижнего (в) слоев

с жидкостью, второе — нижним, контактирующим с жесткой стенкой, при этом ρ_{s1} , ρ_{s2} — плотности слоев; h_1 , h_2 — толщины каждого слоя; σ_1 , σ_2 — коэффициенты Пуассона; E_1 , E_2 — модули упругости; μ_1 , μ_2 — коэффициенты потерь; $E_1^* = E_1(1 - i\mu_1)$, $E_2^* = E_2(1 - i\mu_2)$ — комплексные модули упругости. Распространение малых возмущений в каждом слое покрытия описывается уравнениями Навье, которые в декартовых координатах имеют вид [10]

$$\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} = C_{Tk}^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial y^2} \right) + (C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2) \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x \partial y} \right), \quad k = 1, 2; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2} = C_{Tk}^2 \left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial y^2} \right) + (C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2) \left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x \partial y} \right), \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

где ξ_1 , η_1 , ξ_2 , η_2 — продольные и поперечные к поверхности покрытия компоненты деформации верхнего и нижнего слоя соответственно; C_{L1} , C_{T1} , C_{L2} , C_{T2} — скорости продольных и поперечных волн в верхнем и нижнем слое соответственно. Будем полагать, что σ_1 , σ_2 являются вещественными величинами, тогда нормированные скорости распространения возмущений можно определить следующим образом [11]:

$$C_{Tk} = \frac{1}{U_0} \sqrt{\frac{E_k^*}{2\rho_{sk}(1 + \sigma_k)}}, \quad C_{Lk} = \frac{1}{U_0} \sqrt{\frac{E_k^*(1 - \sigma_k)}{\rho_{sk}(1 - \sigma_k)(1 - 2\sigma_k)}}, \quad k = 1, 2.$$

Схема течения представлена на рис. 1. Будем полагать, что линии тока основного потока являются квазипараллельными, т. е. на периоде волны возмущения профиль продольной компоненты скорости U незначительно меняется по оси x , поперечная компонента скорости V мала. Введем малые возмущения решения системы:

$$\tilde{U} = U + u, \quad \tilde{V} = V + v, \quad \tilde{P} = P + p \quad (7)$$

(u , v , p — малые возмущения; U , V , P — решение системы (2)–(4), описывающее пограничный слой Блазиуса [12]). После подстановки (8) в (2)–(4) и линеаризации с учетом сделанных предположений уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Введем характерные масштабы длины L и скорости U_0 и обезразмерим переменные: $x = Lx'$, $y = Ly'$, $u = U_0 u'$, $v = U_0 v'$, $p = \rho_f U_0^2 p'$, $\xi_k = L \xi_{k'}$, $\eta_k = L \eta_{k'}$, $C_{Lk} = U_0 C'_{Lk}$, $C_{Tk} = U_0 C'_{Tk}$, $k = 1, 2$. В дальнейшем для координат, скоростей и давления будем использовать те же обозначения, что и в размерных уравнениях (без штрихов). Тогда вид обезразмеренных уравнений Навье не изменится, а обезразмеренные уравнения Навье — Стокса принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u; \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v; \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (10)$$

где $\text{Re} = LU_0/\nu$ — число Рейнольдса.

Решение системы (5), (6), (8)–(10) будем искать в классе бегущих волн, имеющих фиксированные частоту ω и продольное волновое число α (в общем случае комплексное):

$$(u, v, p, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)^T(x, y, t) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2)^T(y) e^{i(\alpha x - \omega t)}. \quad (11)$$

Подставляя выражения (11) в уравнения (5), (6), (8)–(10), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i(\alpha U - \omega)\hat{u} + U'\hat{v} + i\alpha\hat{p} - \text{Re}^{-1}(\hat{u}' - \alpha^2\hat{u}) = 0; \quad (12)$$

$$i(\alpha U - \omega)\hat{v} + \hat{p}' - \text{Re}^{-1}(\hat{v}' - \alpha^2\hat{v}) = 0; \quad (13)$$

$$i\alpha\hat{u} + \hat{v}' = 0; \quad (14)$$

$$\omega^2\hat{\xi}_k + C_{Tk}^2(-\alpha^2\hat{\xi}_k + \hat{\xi}_{k''}) + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2)(-\alpha^2\hat{\xi}_k + i\alpha\hat{\eta}_{k'}) = 0; \quad (15)$$

$$\omega^2\hat{\eta}_k + C_{Tk}^2(-\alpha^2\hat{\eta}_k + \hat{\eta}_{k''}) + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2)(\hat{\eta}_{k''} + i\alpha\hat{\xi}_{k'}) = 0, \quad (16)$$

где $k = 1, 2$; штрих означает дифференцирование по y .

Поставим граничные условия для системы (12)–(16). Условия затухания возмущений во внешнем потоке на бесконечности имеют вид

$$\hat{u}|_{y \rightarrow \infty} = \hat{v}|_{y \rightarrow \infty} = 0. \quad (17)$$

На границе между покрытием и жидкостью должны выполняться условия прилипания

$$\left. \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right|_{(x,0)} = \tilde{U}(x + \xi_1, \eta_1, t), \quad \left. \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \right|_{(x,0)} = \tilde{V}(x + \xi_1, \eta_1, t),$$

где $\tilde{U} = U + u$; $\tilde{V} = V + v$. Для постановки этих условий необходимо знать форму поверхности, что существенно усложняет задачу. Будем полагать, что смещения поверхности малы [13], и использовать линейное приближение [14]. Разложение в ряд Тейлора дает

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \tilde{U}(x, 0, t) + \xi_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}(x, 0, t) + \eta_1 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}(x, 0, t) + \dots; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} = \tilde{V}(x, 0, t) + \xi_1 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(x, 0, t) + \eta_1 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y}(x, 0, t) + \dots \quad (19)$$

Учитывая, что смещения ξ_1 вдоль оси x и производные от компонент скорости основного потока по x малы, в квазипараллельном приближении будем пренебрегать поперечной

компонентой скорости основного потока V . Тогда, оставляя в (18), (19) только линейные члены, для возмущений при $y = 0$ получаем уравнения

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = u + \eta_1 U', \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = v. \quad (20)$$

Из (11), (20) следует

$$-i\omega \hat{\xi}_1 = \hat{u} + \eta_1 U', \quad -i\omega \hat{\eta}_1 = \hat{v}. \quad (21)$$

Динамические условия на границе между жидкостью и покрытием являются условиями непрерывности полных нормальных и касательных напряжений на этой границе

$$T_1(x + \xi_1, \eta_1) \cdot \mathbf{n}_1 = T_f(x + \xi_1, \eta_1) \cdot \mathbf{n}_1,$$

где $\mathbf{n}_1$ — нормаль к касательной поверхности в точке границы раздела жидкости и верхнего слоя; T_1, T_f — тензоры напряжений, действующих со стороны верхнего слоя покрытия и со стороны жидкости. Разлагая эти тензоры в ряд Тейлора вблизи невозмущенного состояния $(x, 0)$, оставляя в разложении только линейные члены с учетом малости ξ_1 и η_1 , получаем динамические условия [4]

$$2\rho C_{T1}^2 [\hat{\eta}'_1 + (C_{L1}^2/(2C_{T1}^2) - 1)(i\alpha \xi_1 + \hat{\eta}'_1)] = 2\text{Re}^{-1} \hat{v}' - \hat{p}; \quad (22)$$

$$\rho C_{T1}^2 (\hat{\xi}'_1 + i\alpha \hat{\eta}_1) = \text{Re}^{-1} (\hat{u}' + i\alpha \hat{v}' + U'' \hat{\eta}) \quad (23)$$

($\rho = \rho_{s1}/\rho_f$). Для рассматриваемого пограничного слоя Блазиуса $U'' = 0$ при $y = 0$.

Кинематические условия при $y = -h_1$ являются условиями неразрывности слоев покрытия:

$$\hat{\xi}_1|_{y=-h_1} = \hat{\xi}_2|_{y=-h_1}, \quad \hat{\eta}_1|_{y=-h_1} = \hat{\eta}_2|_{y=-h_1}. \quad (24)$$

Как и выше, динамические условия при $y = -h_1$ представляют собой условия непрерывности полных касательных и нормальных напряжений на границе между верхним и нижним слоями покрытия:

$$T_1(x + \xi_1, -h_1 + \eta_1) \cdot \mathbf{n}_2 = T_2(x + \xi_1, -h_1 + \eta_1) \cdot \mathbf{n}_2,$$

где $\mathbf{n}_2$ — нормаль к касательной поверхности в точке границы раздела верхнего и нижнего слоев.

При выводе линеаризованных условий принимаем те же предположения, что и при выводе динамических условий при $y = 0$. В результате получаем [3]

$$\rho_{s1} C_{T1}^2 \left(\hat{\eta}'_1 + \left(\frac{C_{L1}^2}{2C_{T1}^2} - 1 \right) (i\alpha \xi_1 + \hat{\eta}'_1) \right) = \rho_{s2} C_{T2}^2 \left(\hat{\eta}'_2 + \left(\frac{C_{L2}^2}{2C_{T2}^2} - 1 \right) (i\alpha \xi_2 + \hat{\eta}'_2) \right); \quad (25)$$

$$\rho_{s1} C_{T1}^2 (\hat{\xi}'_1 + i\alpha \hat{\eta}_1) = \rho_{s2} C_{T2}^2 (\hat{\xi}'_2 + i\alpha \hat{\eta}_2). \quad (26)$$

На границе между покрытием и жесткой стенкой ставятся условия прилипания

$$\hat{\xi}_2|_{y=-h_1-h_2} = \hat{\eta}_2|_{y=-h_1-h_2} = 0. \quad (27)$$

Уравнения (12)–(16) с граничными условиями (17), (21)–(27) составляют обобщенную задачу на собственные значения α .

В данной работе число Рейнольдса определяется следующим образом:

$$\text{Re} = \frac{\delta^* U_0}{\nu},$$

где δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя:

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{U}{U_0}\right) dy.$$

Численный метод. Расчет проводился с помощью метода коллокаций. Область $[-1, 1]$ дискретизируется следующим образом. В качестве узлов интерполяции используются корни полиномов Чебышева второго рода и точки $(-1, 1)$ (точки Гаусса — Лобатто):

$$\zeta_j = \cos(\pi j / (N - 1)), \quad j = 0, 1, \dots, N - 1,$$

в качестве базисных функций — многочлены Лагранжа $h_i(x)$:

$$h_i(\zeta) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_i - \zeta_j}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где $h_i(\zeta_j) = \delta_{ij}$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Физическая область $[-(h_1 + h_2), y_{\max}]$ ($y_{\max} \gg \delta^*$) разбивается на три области: область $[0, y_{\max}]$, занятую потоком, область $[-h_1, 0]$, занятую верхним слоем покрытия, и область $[-(h_1 + h_2), -h_1]$, занятую нижним слоем покрытия. Для каждой из этих областей можно выбрать разное число узлов интерполяции, однако для упрощения изложения будем считать количество узлов одинаковым.

Отображение отрезка $\zeta \in [-1, 1]$ на область $y \in [0, y_{\max}]$ осуществлялось с помощью дробно-линейного преобразования [11]

$$y = l \frac{1 + \zeta}{b - \zeta},$$

где l — масштабный множитель; $b = 1 + 2l/y_{\max}$ — константа, необходимая для контроля распределения узлов дискретизации. Отображение отрезка $\zeta \in [-1, 1]$ на часть физической области, занятой верхним слоем $y \in [-h_1, 0]$, осуществлялось с помощью линейного преобразования. В общем виде линейное преобразование отрезка $\zeta \in [-1, 1]$ в отрезок $y \in [a, b]$ осуществляется отображением

$$y = \frac{b - a}{2} \left(\zeta - \frac{a + b}{a - b} \right).$$

Тогда для верхнего слоя имеем

$$y = \frac{h_1}{2} (\zeta - 1).$$

Отображение отрезка $\zeta \in [-1, 1]$ на физическую область, занятую нижним слоем $y \in [-h_1 - h_2, -h_1]$, также осуществлялось линейным преобразованием

$$y = \frac{h_2}{2} \left(\zeta - \frac{2h_1 + h_2}{h_2} \right).$$

Обобщенная спектральная задача. В системе уравнений (12)–(14) функцией-параметром является продольная (вдоль оси x) компонента скорости основного потока U . В качестве основного потока используется пограничный слой Блазиуса. Компоненты скорости основного потока находятся из решения уравнения Блазиуса [12]

$$\Phi'''(y) + \Phi\Phi''(y) = 0 \tag{28}$$

с граничными условиями $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$, где $\Phi' = U$. Уравнение (28) можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d}{dy} \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ -\Phi_0\Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где $\Phi_0 = \Phi$; $\Phi_1 = \Phi'$; $\Phi_2 = \Phi''$.

Известно, что профиль такого пограничного слоя не описывается аналитическим выражением. Систему (29) можно решать различными способами. В настоящей работе эта система решается с помощью конечно-разностного метода и решателя bvp4c в среде MATLAB ($\Phi' = U$, $\Phi'' = U'$ — коэффициенты, входящие в уравнения (12), (13) и в граничные условия (21)).

Уравнения (12)–(16) с граничными условиями (17), (21)–(27) представляют собой обобщенную задачу на собственные значения α . В полученную задачу параметр α входит нелинейным образом. В уравнении (12) можно понизить степень α с помощью уравнения неразрывности (16). В уравнениях (13), (15), (16) степень α можно понизить путем введения вспомогательных переменных $\hat{f} = \alpha\hat{v}$, $\hat{g}_k = \alpha\hat{\xi}_k$, $\hat{h}_k = \alpha\hat{\eta}_k$, $k = 1, 2$. Тогда система (12)–(16) принимает вид

$$\begin{aligned} i(\alpha U - \omega)\hat{u} + U'\hat{v} + i\alpha\hat{p} - \text{Re}^{-1}(\hat{u}'' - i\alpha\hat{v}) &= 0, \\ i(\alpha U - \omega)\hat{v} + \hat{p}' - \text{Re}^{-1}(\hat{v}'' - \alpha\hat{f}) &= 0, \\ i\alpha\hat{u} + \hat{v}' = 0, \quad \alpha\hat{v} - \hat{f} &= 0, \\ \omega^2\hat{\xi}_k + C_{Tk}^2(-\alpha\hat{g}_k + \hat{\xi}_k'') + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2)(-\alpha\hat{g}_k + i\alpha\hat{\eta}_k') &= 0, \quad k = 1, 2, \\ \omega^2\hat{\eta}_k + C_{Tk}^2(-\alpha\hat{h}_k + \hat{\eta}_k'') + (C_{Lk}^2 - C_{Tk}^2)(\hat{\eta}_k'' + i\alpha\hat{\xi}_k') &= 0, \quad k = 1, 2, \\ \alpha\hat{\xi}_k - \hat{g}_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad \alpha\hat{\eta}_k - \hat{h}_k &= 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (30)$$

После дискретизации система уравнений (30) принимает вид линейной обобщенной задачи на собственные значения

$$L\hat{s} = \alpha G\hat{s},$$

где $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{f}, \hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{g}_1, \hat{h}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2, \hat{g}_2, \hat{h}_2)^T$; верхний индекс обозначает компоненты каждого вектора: $\hat{u} = (\hat{u}^0, \hat{u}^1, \dots, \hat{u}^{N-1})^T$, $\dots$, $\hat{h}_2 = (\hat{h}_2^0, \hat{h}_2^1, \dots, \hat{h}_2^{N-1})^T$.

Матрицы L и G имеют блочно-диагональную структуру

$$L = \begin{pmatrix} L_0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_0 & 0 & 0 \\ 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы L_0 , L_1 , L_2 , G_0 , G_1 , G_2 принимают вид

$$\begin{aligned} L_0 &= \begin{pmatrix} -i\omega I - \text{Re}^{-1} D_0^2 & \text{diag}(U') & O & O \\ O & -i\omega I - \text{Re}^{-1} D_0^2 & \tilde{D}_0 & O \\ O & D_0 & O & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix}, \\ G_0 &= \begin{pmatrix} -i \text{diag}(U) & -i \text{Re}^{-1} D_0 & -iI & O \\ O & -i \text{diag}(U) & O & -i \text{Re}^{-1} I \\ -iI & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$L_k = \begin{pmatrix} \omega^2 I + C_{Tk}^2 D_k^2 & O & O & O \\ O & \omega^2 I + C_{Lk}^2 D_k^2 & O & O \\ O & O & I & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

$$G_k = \begin{pmatrix} O & i(C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2)D_k & C_{Lk}^2 I & O \\ i(C_{Tk}^2 - C_{Lk}^2)D_k & O & O & C_{Tk}^2 I \\ I & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2.$$

Здесь каждый блок — матрица размером $N \times N$, в которой $\text{diag}(A)$ — диагональная матрица с вектором A на диагонали; I — единичная матрица; O — нулевая матрица; $D_0, \tilde{D}_0, D_1, D_2$ — матрицы дифференцирования Чебышева для компонент скорости, давления и деформаций в верхнем и нижнем слоях покрытия соответственно. Эти матрицы получаются после дискретизации производных.

Для того чтобы выполнялись однородные граничные условия при $y = y_{\max}$, $y = -h_1 - h_2$, в матрицах L и G необходимо заменить соответствующие строки на нулевые строки. Это позволяет уменьшить количество уравнений, удаляя нулевые строки и соответствующие им столбцы. Остальные граничные условия запишем в дискретной форме.

Кинематические условия (21) при $y = 0$ имеют вид

$$-i\omega\hat{\xi}_1^0 = \hat{u}^{N-1} + \hat{\eta}_1^0 U'^{N-1}, \quad -i\omega\hat{\eta}_1^0 = \hat{v}^{N-1}, \quad (31)$$

динамические условия (22), (23) при $y = 0$ —

$$2\rho C_{T1}^2(\hat{\eta}_1^0 + (C_{L1}^2/(2C_{T1}^2) - 1)(i\alpha\hat{\xi}_1^0 + \hat{\eta}_1^0)) = 2\text{Re}^{-1}\hat{v}'^{N-1} - \hat{p}^{N-1}; \quad (32)$$

$$\rho C_{T1}^2(\hat{\xi}_1^0 + i\alpha\hat{\eta}_1^0) = \text{Re}^{-1}(\hat{u}'^{N-1} + i\alpha\hat{v}^{N-1}). \quad (33)$$

Кинематические условия (24) при $y = -h_1$ имеют вид

$$\hat{\eta}_1^{N-1} = \hat{\eta}_2^1, \quad \hat{\xi}_1^{N-1} = \hat{\xi}_2^1, \quad (34)$$

динамические условия (25), (26) при $y = -h_1$ —

$$\begin{aligned} \rho_{s1}C_{T1}^2(\hat{\eta}_1^{N-1} + (C_{L1}^2/(2C_{T1}^2) - 1)(i\alpha\hat{\xi}_1^{N-1} + \hat{\eta}_1^{N-1})) = \\ = \rho_{s2}C_{T2}^2(\hat{\eta}_2^1 + (C_{L2}^2/(2C_{T2}^2) - 1)(i\alpha\hat{\xi}_2^1 + \hat{\eta}_2^1)); \end{aligned} \quad (35)$$

$$\rho_{s1}C_{T1}^2(\hat{\xi}_1^{N-1} + i\alpha\hat{\eta}_1^{N-1}) = \rho_{s2}C_{T2}^2(\hat{\xi}_2^1 + i\alpha\hat{\eta}_2^1). \quad (36)$$

Для наложения этих граничных условий необходимо поменять строки в матрицах L и G на строки, которые соответствуют уравнениям (32)–(36).

В результате получаем полную задачу (30) с граничными условиями (31)–(36) на собственные значения α .

Использованные экспериментальные данные. В настоящей работе используются экспериментальные данные, характерные для широкого круга кремнийорганических соединений: модуль упругости $E(f)$ (в мегапаскалях) и коэффициент потерь $\mu(f)$, которые для нижнего слоя (пористая резина “Пента 740”) определяются из выражений

$$E(f) = 0,0385 \log_{10}(f) + 0,0987, \quad \mu(f) = 0,15, \quad \rho = 600 \text{ кг/м}^3,$$

для верхнего слоя (резина “Пента 710”) — из выражений

$$E(f) = 0,1004 \log_{10}(f) + 0,9394, \quad \mu(f) = 0,0016 \log_{10}(f) + 0,0511, \quad \rho = 1120 \text{ кг/м}^3.$$

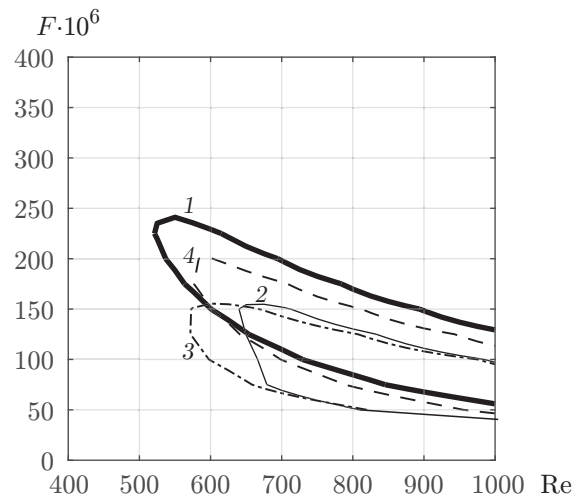


Рис. 2. Кривые нейтральной устойчивости при различных значениях толщины верхнего слоя и скорости внешнего потока:

1 — нейтральная кривая в случае твердой стенки при $U_0 = 15$ м/с, 2 — $h_2 = 2$ мм, $h_1 = 0,2$ мм, $U_0 = 15$ м/с, 3 — $h_2 = 2$ мм, $h_1 = 0,1$ мм, $U_0 = 15$ м/с, 4 — $h_2 = 2$ мм, $h_1 = 0,2$ мм, $U_0 = 10$ м/с

Поскольку материалы обоих слоев являются практически несжимаемыми, коэффициент Пуассона σ обеих резин выбран равным 0,47. Численные эксперименты показывают, что увеличение этого коэффициента до 0,49 незначительно влияет на результат.

Результаты расчетов. Полученная задача решается с помощью QZ-алгоритма [15] в среде MATLAB, в результате получается спектр матрицы $G^{-1}L$, из которого соответствующие физической задаче моды выбирались из условия их сходимости к фиксированным значениям при увеличении числа узлов интерполяции N , M в потоке и в покрытии. Из них выбирается ведущая мода (с минимальной мнимой частью α), которая соответствует возмущению, распространяющемуся вниз по потоку ($\text{Re}(\alpha) > 0$). Поиск критического числа Рейнольдса Re_* осуществлялся в диапазоне $Re \in [200; 1000]$, а частотный параметр $F = \omega / Re$ [12], обычно используемый при описании гидродинамической устойчивости пограничного слоя, определялся в диапазоне $F \in [50 \cdot 10^{-6}, 1000 \cdot 10^{-6}]$. В этом случае $\omega \in [10^{-2}, 1]$. Выбор $y_{\max}$ обусловлен сходимостью спектра при увеличении данного параметра. Результаты расчетов показывают, что при $y_{\max} = 20$, $N = 70$, $M = 50$ собственные числа α различаются незначительно (в четвертом-пятом знаке после запятой).

На рис. 2 приведены кривые нейтральной устойчивости, области внутри которых соответствуют неустойчивому течению. Видно, что при различных геометрических параметрах покрытия критическое число Рейнольдса Re_* может быть больше критического числа Рейнольдса для случая жесткой стенки $Re_*^0 = 520$. Также видно, что частота F_* , соответствующая Re_* , и диапазон частот, в котором возникают неустойчивые возмущения, уменьшаются. При скорости внешнего потока $U_0 \geq 15$ м/с появляются новые области неустойчивости вследствие податливости покрытия. В работе [3] показано, что такие же области возникают в случае однослойного покрытия.

На рис. 3 приведена зависимость критического числа Рейнольдса от толщины верхнего и нижнего слоев при скорости внешнего потока $U_0 = 15$ м/с. Видно, что при толщине верхнего слоя $h_1 > 0,4$ мм критическое число Рейнольдса Re_* не зависит от толщины нижнего слоя. Это обусловлено тем, что возмущение в покрытии затухает на верхнем слое и не доходит до нижнего слоя. При $h_2 > 2$ мм эффекты, связанные с податливостью,

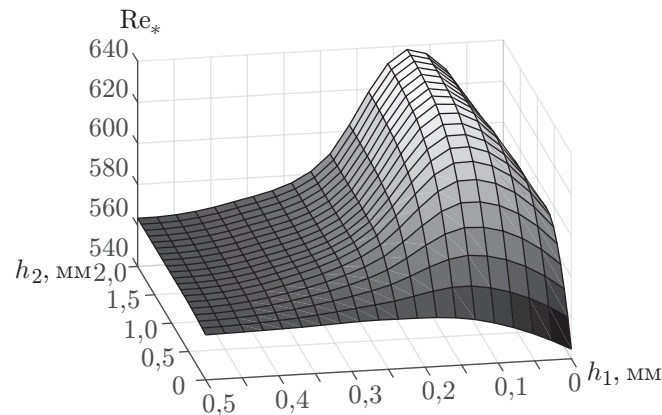


Рис. 3. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от толщины слоев при $U_0 = 15$ м/с

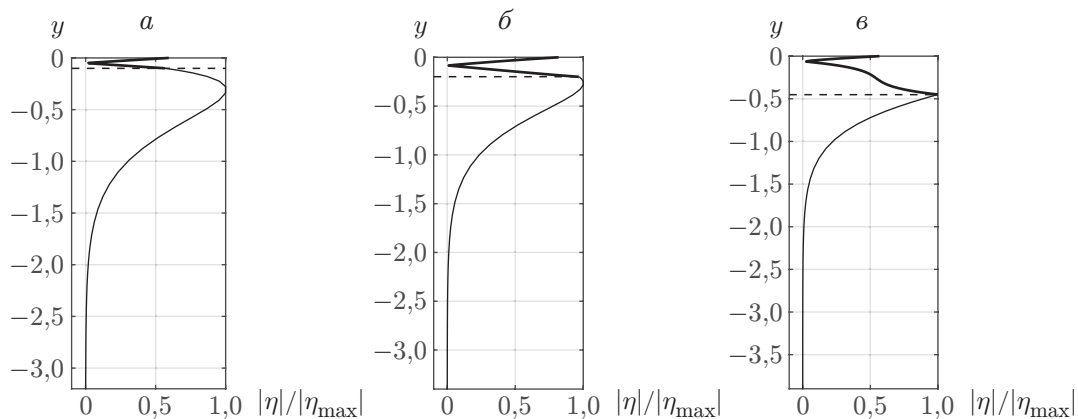


Рис. 4. Профили амплитуды поперечной компоненты деформации в покрытии, нормированной на ее максимум, при $h_2 = 3$ мм, $U_0 = 15$ м/с и различных значениях h_1 :

a — $h_1 = 0,10$ мм, $б$ — $h_1 = 0,15$ мм, $в$ — $h_1 = 0,45$ мм; штриховая линия — граница раздела слоев

не зависят от толщины нижнего слоя, поскольку волна возмущений в покрытии затухает на нижнем слое, не доходя до жесткой стенки. Как показано в [4], этот эффект возникает также в случае однослойного покрытия. Таким образом, можно зафиксировать значение $h_2 \geq 2$ мм.

Также на рис. 3 видно, что при $h_1 \approx 0,15$ мм существует локальный максимум Re_* . Объяснение этому можно получить, проанализировав профиль амплитуды поперечной компоненты деформации в покрытии (рис. 4). Аналогичные профили для однослойных покрытий рассчитаны в [16]. Выше границы раздела слоев расположен профиль деформации в верхнем слое, ниже — в нижнем слое. При уменьшении h_1 волна достаточно быстро переходит в нижний слой (см. рис. 4, a). При $h_1 = 0,15$ мм максимальное значение амплитуды волны в верхнем слое практически совпадает с максимальным значением в нижнем слое, при этом не возникает излома, показанного на рис. 4, $в$.

На рис. 5 представлена зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от толщины верхнего слоя и скорости внешнего потока. Видно, что максимум Re_* достигается при толщине верхнего слоя $h_1 \approx 0,15$ мм.

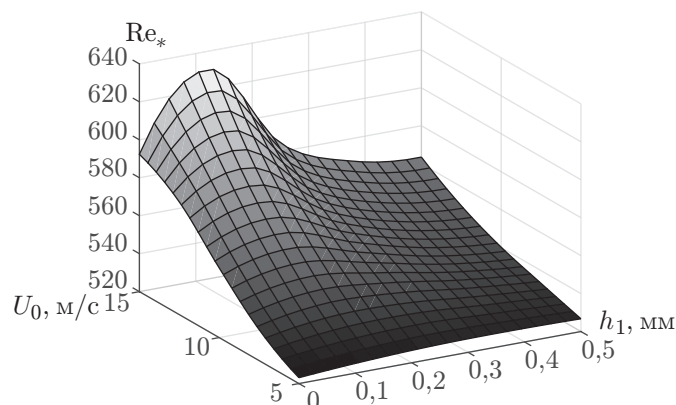


Рис. 5. Зависимость критического числа Рейнольдса Re_* от толщины верхнего слоя и скорости внешнего потока при $h_2 = 2$ мм

Для рассматриваемого покрытия значение $h_1 = 0,15$ мм можно считать оптимальной толщиной верхнего слоя, поскольку для использования на практике необходимо добиваться именно увеличения Re_* .

Закключение. В работе проведен анализ устойчивости пограничного слоя над двухслойным податливым покрытием. Полученная многопараметрическая задача с учетом граничных условий решается с помощью метода коллокаций, в котором в качестве интерполяционных многочленов выбраны многочлены Лагранжа с узлами в корнях полинома Чебышева второго рода. Результаты численных экспериментов показывают, что наличие двухслойного покрытия оказывает существенное влияние на устойчивость пограничного слоя. Анализ результатов расчетов показывает, что число определяющих параметров можно уменьшить. При акценте на критическое число Рейнольдса отсутствует необходимость исследовать зависимость характеристик устойчивости от частот возмущений; затухание возмущений в покрытии позволяет зафиксировать толщину нижнего слоя, немонотонное поведение критического числа Рейнольдса позволяет определить оптимальную толщину верхнего слоя. Критическое число Рейнольдса для рассматриваемого покрытия при различных значениях толщины его слоев и скорости внешнего потока всегда больше, чем в случае жесткой стенки. Это необходимо учитывать в практических приложениях. При рассмотрении больших значений скоростей могут возникать новые области неустойчивости, требующие отдельного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Riley J. J., Gad-el-Hak M., Metcalfe R. W. Compliant coatings // Annual Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 393–420.
2. Carpenter P. W., Lucey A. D., Dixon A. E. The optimization of compliant walls for drag reduction // Recent developments in turbulence management. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1991. P. 195–221.
3. Yeo K. S. The stability of boundary-layer flow over single- and multiple-layer viscoelastic walls // J. Fluid Mech. 1988. V. 196. P. 359–408.
4. Бойко А. В., Кулик В. М., Филимонов В. А. Устойчивость пограничного слоя плоской пластины над податливыми покрытиями повышенной прочности // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Физика. 2011. Т. 6, вып. 4. С. 104–115.
5. Kulik V. M., Semenov B. N., Boiko A. V., et al. Measurement of dynamic properties of viscoelastic materials // Experiment. Mech. 2009. V. 49. P. 417–425.

6. Kulik V. M., Boiko A. V., Seoudi B., et al. Measurement method of complex viscoelastic material properties // Intern. J. Solids Structures. 2010. V. 47, N 3. P. 374–382.
7. Kulik V. M., Boiko A. V., Bardakhanov S. P., et al. Viscoelastic properties of silicone rubber with admixture of SiO₂ nanoparticles // Mater. Sci. Engng. A. 2011. V. 528, iss. 18. P. 5729–5732.
8. Кулик В. М., Бойко А. В. Физические основы методов измерения вязкоупругих свойств // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 5. С. 123–136.
9. Ландау Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986. Т. 6.
10. Ландау Л. Д. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987. Т. 7.
11. Бойко А. В., Нечепуренко Ю. М., Жучков Р. Н., Козелков А. С. Блок расчета положения ламинарно-турбулентного перехода для пакета ЛОГОС // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Вып. 21. С. 201–220.
12. Boiko A. V. Physics of transitional shear flows / A. V. Boiko, G. R. Grek, A. V. Dovgal, V. V. Kozlov. Berlin: Springer Verlag, 2011.
13. Кулик В. М. О граничных условиях на податливой стенке в турбулентном течении // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20, № 4. С. 445–450.
14. Benjamin T. Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mech. 1959. V. 6, N 2. P. 161–205.
15. Moler C. B., Stewart G. W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10, N 2. P. 241–256.
16. Кулик В. М. Плоская волна деформации в изотропном слое вязкоупругого материала // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 3. С. 104–111.

*Поступила в редакцию 28/І 2019 г.,
после доработки — 28/І 2019 г.
Принята к публикации 28/І 2019 г.*
