

ОСОБЕННОСТИ САМОРАЗОГРЕВА В СИСТЕМАХ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ ТОРМОЖЕНИЯ

В. Ю. Филимонов

Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, 656038 Барнаул
vufilimonov@rambler.ru

Проведен качественный анализ типов структур фазовых траекторий и соответствующих термограмм при различных значениях критериев Семенова и Тодеса для систем с сильным самоторможением. Установлен строгий критерий вырождения теплового взрыва. Проанализированы физические механизмы различных режимов процессов саморазогрева. Получена приближенная функциональная зависимость критического значения параметра Семенова от параметра самоторможения и определены границы ее применения.

Ключевые слова: тепловой взрыв, сильное самоторможение, фазовая траектория, критические условия.

ВВЕДЕНИЕ

В классической теории горения гетерогенных систем для описания нестационарных температурных полей при анализе особенностей протекания теплового взрыва, при расчете температурного профиля стационарной волны горения, а также при рассмотрении послыдного режима протекания реакции используются представления об эффективных кинетических функциях, структура которых определена экспериментально [1, 2]. Несмотря на то, что современные методы компьютерного моделирования позволяют рассматривать и значительно более сложные задачи (с учетом диффузионных процессов, на основе диаграмм состояния бинарных систем [3–5]), в задачах горения методы расчета с применением кинетических функций используются и по настоящее время. Задание эффективной функции тепловыделения в уравнении теплопроводности или теплового баланса упрощает моделирование задач теории горения. При этом важно, что полученные таким образом решения определяют качественные особенности горения либо воспламенения газодисперсных или гетерогенных конденсированных систем. Ключевым здесь является вопрос о критических условиях самовоспламенения. Следует заметить, что до настоящего времени практически не было попыток аналитического рассмотрения задач с представлением функции тепловыделения на основе кинетических функций (за исключением работ [6, 7]) для анализа условий самовоспламенения. Классическое аналитическое решение для критиче-

ских условий теплового взрыва было получено еще Н. Н. Семеновым для гомогенных систем [8]. В то же время не подлежит сомнению, что аналитическое решение задачи более наглядно и дает более прозрачное качественное понимание физических механизмов перехода от нижнего температурного режима к верхнему. Одним из наиболее употребляемых в математических моделях законов самоторможения является логарифмический закон [9–11], который описывает экспоненциальное («сильное») самоторможение реакции при образовании слоя продукта, разделяющего реагенты. В [12] анализируются критические условия самовоспламенения таких систем с учетом температурного распределения в объеме цилиндрического реакционного сосуда для граничных условий первого рода методами численного моделирования.

В настоящей работе методами качественного анализа системы дифференциальных уравнений теплового баланса и кинетики самоторможения определено условие вырождения теплового взрыва и приближенно рассчитаны критические условия самовоспламенения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривалась классическая система уравнений теплового баланса и кинетики образования продукта для логарифмического закона торможения при однородном распределении температуры в объеме сосуда [12]:

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = \exp(\Theta - m\eta) - \delta\Theta,$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \gamma \exp(\Theta - m\eta), \quad (1)$$

при начальных условиях $\tau = 0, \quad \Theta = \eta = 0$.

Здесь $\Theta = E(T - T_0)/RT_0^2$, $\delta = (n + 1) \times \alpha RT_0^2 S \exp(E/RT_0)/VQk_0$ — критерий Семёнова, $\gamma = c\rho RT_0^2/QE$ — критерий Тодеса, m — кинетический параметр, $n = 0, 1, 2$ соответствуют плоской, цилиндрической и сферической геометрии реакционного сосуда, α — эффективный коэффициент теплоотдачи, S, V — площадь поверхности и объем сосуда, E — энергия активации реакции, T_0 — начальная температура системы, Q — тепловой эффект реакции, k_0 — предэкспонент, c, ρ — теплоемкость и плотность смеси. Условие $RT_0/E \ll 1$ предполагается выполненным.

Сложность анализа системы (1) заключается в отсутствии стационарных решений или особых точек, что не позволяет сразу перейти к анализу алгебраических уравнений. Как показано в [6, 7], необходимо вначале рассмотреть производные высшего порядка. От системы уравнений первого порядка перейдем к одному уравнению второго порядка. Для этого выразим η из первого уравнения системы (1) и подставим во второе, в результате будем иметь

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Theta}{d\tau} + \delta\Theta\right)\frac{d\Theta}{d\tau} - \left(\frac{d^2\Theta}{d\tau^2} + \delta\frac{d\Theta}{d\tau}\right) &= \\ &= \alpha\left(\frac{d\Theta}{d\tau} + \delta\Theta\right)^2, \quad (2) \end{aligned}$$

где $\alpha = \gamma m$. Для анализа (2) удобнее перейти к новым переменным:

$$u = \frac{d\Theta}{d\tau}, \quad z = u + \delta\Theta = \exp(\Theta - m\eta).$$

Тогда получим нелинейное уравнение первого порядка, определяющее фазовую траекторию системы на плоскости $z-\Theta$:

$$\frac{dz}{d\Theta} = z - \frac{\alpha z^2}{z - \delta\Theta} \quad (3)$$

при начальных условиях $\tau = 0, \Theta = 0, z = 1$.

Решение уравнения (3) определяет зависимость скорости тепловыделения системы от температуры. Данное уравнение является уравнением Абеля второго рода и не интегрируется в квадратурах. Однако можно провести

качественный анализ (3) с точки зрения особенностей разогрева системы на нижнем (наличие максимума температуры) и верхнем (неограниченный рост температуры) температурных режимах и проанализировать соответствующий переход от одного режима к другому, т. е. установить критические условия самовоспламенения системы.

РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Нижний температурный режим

Перейдем к качественному анализу фазовых траекторий, определяемых уравнением (3). На нижнем температурном режиме температура системы должна достигать максимального значения, затем уменьшаться и асимптотически стремиться к нулю. При этом важно иметь представление о структуре изоклины перегибов на термограмме разогрева, которая определяется уравнением (2) при условии $du/d\tau = 0$. Действительно, точка перегиба на термограмме определяется максимальным значением темпа нагрева u , и ее наличие обусловлено конкуренцией двух факторов, а именно ростом темпа нагрева по причине аррениусовского тепловыделения и его уменьшением вследствие самоторможения растущим слоем продукта. Математически это выражено произведением возрастающей и убывающей экспонент в первом уравнении системы (1). Таким образом, если фактор, обусловленный кинетическим торможением, превалирует, с некоторого момента времени, определяемого условием $du/d\tau = 0$, темп нагрева начнет уменьшаться до тех пор, пока не сравняется со скоростью теплоотвода, что соответствует условию $u = 0$. Далее температура будет понижаться. Исходя из этого вопрос о взаимном расположении фазовой траектории, определяемой уравнением (3), и изоклины перегибов $du/d\tau = 0$ на нижнем температурном режиме является ключевым в отношении установления критических условий воспламенения. На плоскости $z-\Theta$ уравнение изоклины принимает вид

$$\Theta = \frac{z}{\delta} \left(1 - \frac{\alpha z}{z - \delta}\right). \quad (4)$$

Изоклина имеет две ветви, разделенные вертикальной асимптотой $z = \delta$, и не имеет экстремумов. Наклон касательной к фазовой траектории (3) в начальной точке равен $1 - \alpha$, следовательно, необходимо рассмотреть два случая.

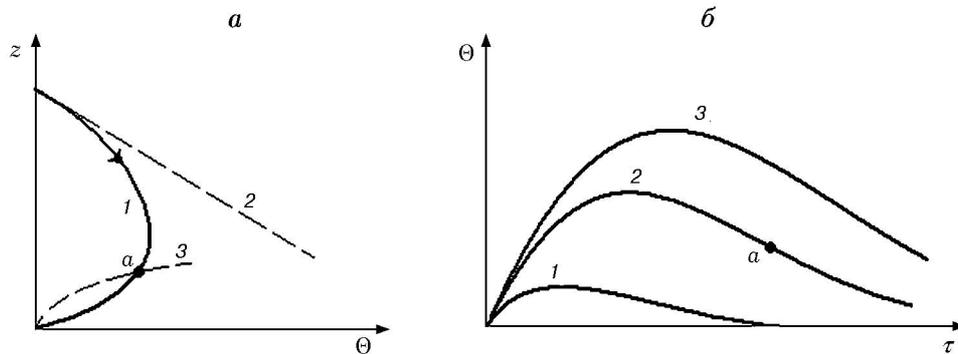


Рис. 1. Схематическая структура фазовой траектории (1) при условии $\alpha > 1$ (а) и соответствующая структура термограмм разогрева $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3$ (б):

2 — касательная в начальной точке, 3 — нижняя ветвь изоклины перегибов

1. $\alpha > 1$. Касательная к траектории в начальной точке пересекает ось абсцисс под тупым углом. Из анализа (4) следует, что при $\alpha > 1$ и $z > \delta$ верхняя ветвь изоклины не находится в первом квадранте плоскости $z-\Theta$, как того требуют условия $z > 0$, $\Theta > 0$. Из анализа (3) вытекает, что в данном случае на зависимости $z(\Theta)$ точек экстремума не будет ни при каких положительных значениях Θ .

На рис. 1,а схематически представлены структура фазовой траектории при $\alpha > 1$ и соответствующие термограммы разогрева при различных значениях параметра δ . До момента достижения максимальной температуры ($u > 0$) на термограмме нет точек перегиба, следовательно, скорости тепловыделения z и разогрева u монотонно замедляются (выпуклость на термограмме направлена вверх). Поскольку фазовая траектория ограничена сверху касательной 2, неограниченный рост температуры не возможен ни при каких значениях параметра δ . Таким образом, траектория является ограниченной, при этом изображающая точка асимптотически стремится к значениям $u = z = \Theta = 0$.

Рассмотренный характер зависимости температуры от времени можно объяснить исходя из следующих физических соображений. В данном случае показатель экспоненты в (1) всегда отрицательный, следовательно, скорость торможения при $\alpha > 1$ велика настолько, что в любой момент времени доминирует над скоростью тепловыделения. Это определяется сравнительно большими значениями m (высокая скорость торможения) и γ (высокая скорость формирования слоя продукта).

Поэтому они и входят в выражение для α мультипликативно. Следовательно, условие $\alpha > 1$ определяет критерий вырождения теплового взрыва. В дальнейшем параметр α будем именовать параметром самоторможения. Заметим, во-первых, что в исследовании [12] был сделан вывод, что условие вырождения определяется не величиной m или γ в системе (1), а их произведением. Этот вывод получен из анализа результатов численного расчета и обнаружен при прямом перемножении указанных параметров. В данном случае это условие получается автоматически, поскольку параметр самоторможения $\alpha = m\gamma$ появился при выводе уравнения (2). Во-вторых, аналитический анализ позволил точно установить критерий вырождения. Стоит заметить, что этот критерий легко получить из рассмотрения частного случая адиабатической задачи (1), из которого непосредственно следует, что при $\alpha > 1$ показатель экспоненты всегда отрицательный.

2. $\alpha < 1$. В данном случае зависимость $z(\Theta)$ не является монотонной и характеризуется наличием максимума (рис. 2).

Верхняя ветвь изоклины перегибов имеет наклонную асимптоту:

$$z_{\infty} = \frac{\alpha\delta}{1-\alpha} + \frac{\delta}{1-\alpha}\Theta. \quad (5)$$

При уменьшении параметра δ (см. рис. 2) возникновение перегибов на термограмме в интервале возрастания температуры определяется характером пересечения ветви изоклины 2 с фазовой траекторией 1, что, в свою очередь, определяется взаимным расположением изоклины и фазовой траектории в точке:

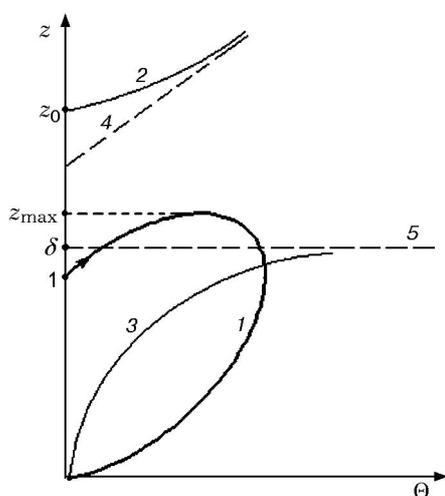


Рис. 2. Фазовая траектории (1) при условии $\alpha < 1$:

2 — верхняя, 3 — нижняя ветви изоклины перегибов; 4 — наклонная, 5 — горизонтальная асимптоты изоклины перегибов

$$z_0 = \frac{\delta}{1 - \alpha} = 1. \quad (6)$$

Именно, если наклон изоклины 2 больше или равен наклону фазовой траектории 1 в указанной точке, возникновение точки перегиба на термограмме произойдет при $\Theta = 0$. При дальнейшем уменьшении параметра δ ($\delta < 1 - \alpha$) пересечение изоклины и фазовой траектории будет единственным. Из анализа (4) следует, что $(dz/d\Theta)|_{\Theta=0} = \alpha$. Тогда единственность перегиба на термограмме определяется условием $\alpha > 1 - \alpha$ или $\alpha > 1/2$ при $\delta < 1/2$. В случае невыполнения данного условия ($\alpha < 1/2$) возможно пересечение изоклины и фазовой траектории в двух точках, при $1 < z_0 < z_{\max}$, т. е. $\delta > 1/2$ (см. рис. 2). Рассмотренные случаи взаимного расположения кривых приведены на рис. 3, 4.

Важно проанализировать физический смысл представленных результатов. Очевидно, что кинетическое торможение (параметр α) и теплоотвод (параметр δ) препятствуют неограниченному росту температуры. Наличие точки перегиба слева от точки максимума (при $u > 0$) обусловлено немонотонной зависимостью показателя экспоненты в (1) от времени, при этом скорость разогрева достигает максимального значения, далее начинает доминировать кинетическое торможение. В случае $\delta < 1/2$, $\alpha > 1/2$ кинетическое торможение оказывает определяющее влияние на

кинетику разогрева, а теплоотвод является фактором второстепенным. На участке *Ob* термограммы (рис. 3, б) происходит быстрый разогрев системы, что соответствует доминированию скорости разогрева над скоростью кинетического торможения (показатель экспоненты в (1) возрастает со временем). При этом на указанном участке тепловыделение всегда превышает теплоотвод. Однако в точке перегиба *b* происходит смена режима, и далее кинетическое торможение превалирует. Показатель экспоненты в (1) начинает убывать, и темпы роста скорости разогрева замедляются, пока скорость тепловыделения не сравняется со скоростью теплоотвода в точке максимума термограммы. Затем температура убывает, но выгорание продолжается вплоть до точки *a*. При дальнейшем понижении температуры выгорание прекращается, далее система охлаждается как инертное вещество.

В случае $\delta > 1/2$, $\alpha < 1/2$ характер конкуренции между скоростями тепловыделения, теплоотвода и самоторможения более сложный. Влияние теплоотвода проявляется на самых ранних стадиях саморазогрева (участок *Os* термограммы на рис. 4, б), скорость разогрева уменьшается за счет влияния теплоотвода. В точке *c* тепловыделение начинает превышать теплоотвод, но в точке *b* вновь сказывается влияние кинетического торможения, которое в дальнейшем доминирует.

Из изложенного следует, что превышение скорости тепловыделения над скоростью теплоотвода является необходимым, но не достаточным условием развития неограниченного саморазогрева системы. В рассмотренных случаях основным лимитирующим фактором является сильное кинетическое торможение. Влияние на кинетику реакции оказывают как скорость теплоотвода (на начальном этапе разогрева), так и скорость кинетического торможения (на развитой стадии процесса разогрева).

Критические условия

Из сказанного следует, что устойчивое положение точки перегиба определяется пересечением фазовой траектории и верхней ветви изоклины перегибов. Здесь имеется определенная аналогия с классической теорией теплового взрыва, когда пересечение кривых скорости тепловыделения и скорости теплоотвода обуславливает нижний стационарный режим. В

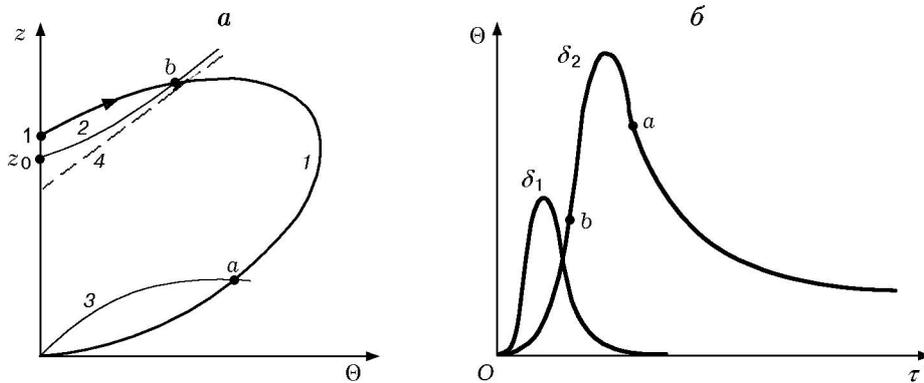


Рис. 3. Взаимное расположение фазовой траектории и изоклины при условии $\alpha > 1/2, \delta < 1/2$ (а) и соответствующая структура термограмм разогрева при различных значениях параметра δ ($\delta_1 > \delta_2$) (б):

1 — фазовая траектория, 2 — верхняя ветвь изоклины перегибов, 3 — нижняя ветвь изоклины перегибов, 4 — асимптота верхней ветви изоклины перегибов

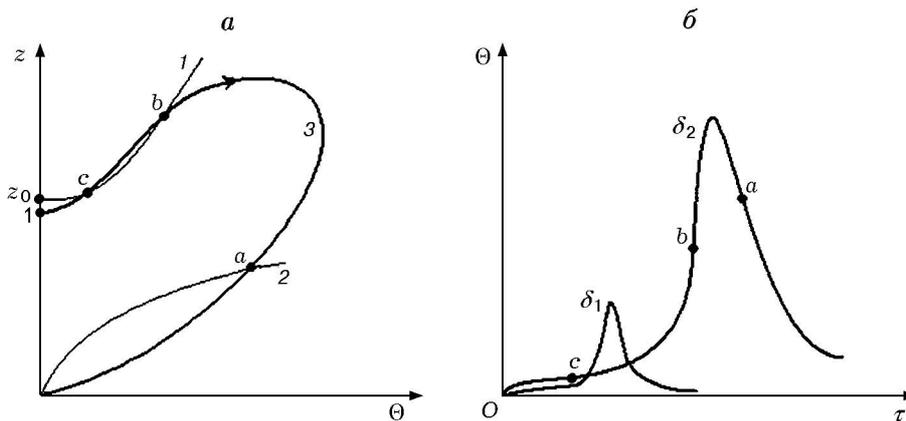


Рис. 4. Взаимное расположение фазовой траектории и изоклины при условии $\alpha < 1/2, \delta > 1$ (а) и соответствующая структура термограмм разогрева при различных значениях параметра δ ($\delta_1 > \delta_2$) (б):

1, 2 — ветви изоклины перегибов, 3 — фазовая траектория

данном случае стационарный режим невозможен, но аналогом линии теплоотвода является изоклина перегибов, характер пересечения которой с фазовой траекторией и будет определять конкуренцию между скоростями тепловыделения и сильного кинетического торможения. Следовательно, при переходе от пересечения изоклины и фазовой траектории к касательной система будет находиться в неустойчивом состоянии, в котором при малом изменении параметра δ система может перейти как к ограниченной траектории, так и к неограниченному росту температуры и скорости разогрева.

Сказанное иллюстрирует рис. 5, на котором представлены сечения фазовой поверхно-

сти

$$\delta = f(z, \Theta, \alpha) \tag{7}$$

плоскостью $\delta = \text{const}$ при различных значениях параметра δ вблизи критических условий.

Таким образом, вблизи критических условий происходит раздвоение решений (бифуркация) и появляется альтернатива: система может пойти по пути либо $1-1'$, либо $1-1''$. Параметр Семенова можно считать параметром, разрушающим бифуркацию [13].

Для анализа критических условий необходимо записать условия касания изоклины перегибов и фазовой траектории:

$$\Theta(z, \delta, \alpha) = \Theta^*(z, \delta, \alpha), \tag{8}$$

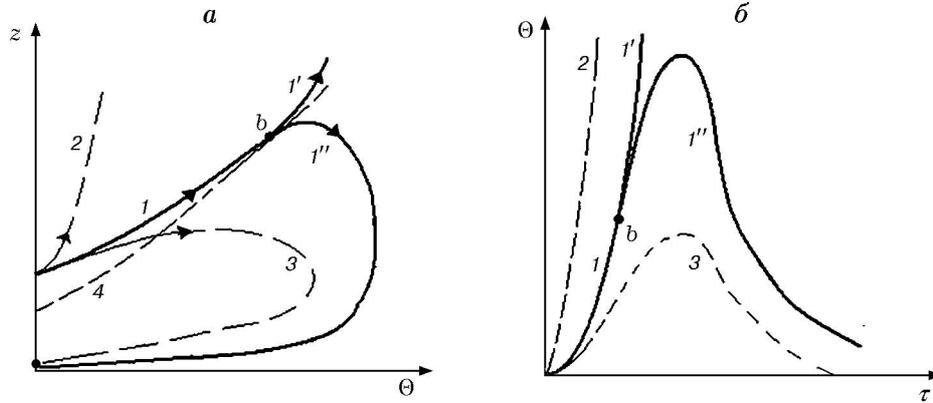


Рис. 5. Поведение фазовой траектории вблизи критических условий (а) и соответствующая структура термограмм вблизи критических условий (б):

1-1'-1'' — критическое сечение (7) $\delta = \delta_{cr}$, 2 — фазовая траектория при $\delta < \delta_{cr}$, 3 — фазовая траектория при $\delta > \delta_{cr}$, 4 — изоклина перегибов в положении касательной к фазовой траектории

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{d\Theta^*}{dz},$$

где Θ^* — уравнение изоклины. Очевидно, что условия (8) позволяют определить зависимость $\delta_{cr}(\alpha)$, разделяющую верхние и нижние режимы реакции. Решение (8) будем искать методом последовательных приближений.

Запишем уравнение (3) в следующем виде:

$$\frac{dz}{d\Theta} = z - \frac{\alpha z^2}{z(1 - \delta\Theta/z)}. \quad (9)$$

Для поиска приближенного решения (9) второе слагаемое в скобках будем считать малым, т. е. полагаем, что теплоотвод меньше тепловыделения на этапе предварительного разогрева. Теплоотвод рассматриваем как второстепенный фактор (квазиadiaбатическое приближение). Тогда в первом приближении решение (9) будет иметь вид

$$\Theta = \frac{1}{1 - \alpha} \ln z. \quad (10)$$

Для удовлетворения первому из условий (8) удобно использовать не полный вид изоклины перегибов (4), а наклонную асимптоту изоклины, близкую к зависимости (5) (см. рис. 3,а). Тогда условия (8) примут вид

$$\frac{1}{1 - \alpha} \ln z = \frac{1 - \alpha}{\delta} z - \alpha, \quad (11)$$

$$\frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{z} = \frac{1 - \alpha}{\delta}.$$

Исключая z из системы (11), получим связь между критическим значением δ в первом приближении и параметром α :

$$\delta_{cr}^{(1)} = (1 - \alpha)^2 \exp[1 - \alpha(1 - \alpha)]. \quad (12)$$

Для расчета второго приближения, учитывающего теплоотвод, перепишем (9) в виде

$$\frac{dz}{d\Theta} = z - \alpha z \left(1 + \frac{\delta\Theta}{z}\right).$$

Для получения приближенного уравнения фазовой траектории необходимо решить линейное уравнение

$$\frac{dz}{d\Theta} = z(1 - \alpha) - \alpha\delta\Theta. \quad (13)$$

Решение (13) с учетом начальных условий (3) имеет вид

$$z = \frac{\alpha\delta}{1 - \alpha} \left(\Theta + \frac{1}{1 - \alpha}\right) + \left[1 - \frac{\alpha\delta}{(1 - \alpha)^2}\right] \exp[(1 - \alpha)\Theta]. \quad (14)$$

Теперь условия касания можно записать следующим образом:

$$\frac{\alpha\delta}{1 - \alpha} \left(\Theta + \frac{1}{1 - \alpha}\right) + \left[1 - \frac{\alpha\delta}{(1 - \alpha)^2}\right] \exp[(1 - \alpha)\Theta] =$$

$$= \frac{\delta\Theta}{1-\alpha} + \frac{\alpha\delta}{1-\alpha}, \quad (15)$$

$$\left[1 - \frac{\alpha\delta}{(1-\alpha)^2}\right] \exp[(1-\alpha)\Theta] = \delta\Theta - \frac{\alpha^2\delta}{(1-\alpha)^2}.$$

Решением (15) является второе приближение для критического значения параметра δ :

$$\delta_{cr}^{(2)} = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha + (1-\alpha) \exp \frac{\alpha - \alpha^2 - 1}{1-\alpha}}. \quad (16)$$

На рис. 6 представлены зависимости (12), (16) критического значения параметра δ от параметра α и результаты численного расчета. Численный расчет проводился для системы (1), при этом критические условия воспламенения определялись по изменению характера зависимости $\Theta(\tau)$. Установлено, что во всей области существования критических условий $\alpha < 1$ происходит резкий, скачкообразный переход от режима с максимумом к режиму с неограниченным ростом температуры при малом изменении параметра δ вблизи критических условий, что позволило фиксировать значения δ_{cr} с точностью до 10^{-6} .

Из данных, представленных на рис. 6, и формулы (16) следует точный результат: при $\alpha = 0$ задача переходит в классическую и, согласно теории Семенова, $\delta_{cr} = e$. Монотонное уменьшение δ с ростом α легко объяснить тем,

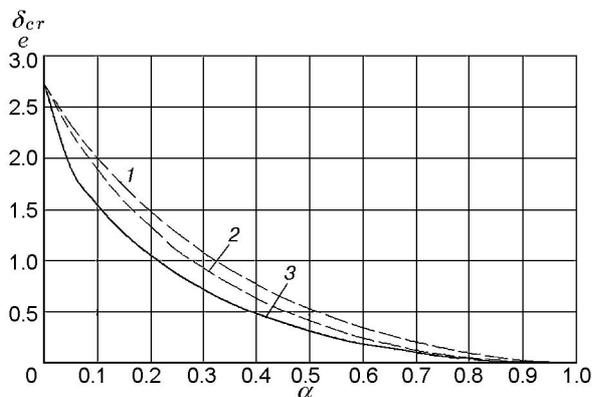


Рис. 6. Зависимость критического значения параметра δ от параметра α :

1 — расчет по формуле (12), 2 — расчет по формуле (16), 3 — результат численного анализа

что с увеличением интенсивности кинетического торможения должен уменьшаться теплоотвод, для того чтобы облегчить условия воспламенения и компенсировать нарастающее кинетическое торможение накоплением тепла в системе. Значение $\alpha = 1$ является предельным, поскольку представляет собой границу вырождения теплового взрыва. При больших значениях данного параметра, как указывалось ранее, тепловой взрыв невозможен. Очевидно, приближение (16) является более точным, однако, как и следовало ожидать, оно хорошо описывает расчетную кривую в области малых значений параметра δ , что использовалось при приближенном интегрировании (9).

Заметим, что можно построить еще более точное приближение решения (9), но это сопряжено с серьезными математическими трудностями и громоздким выражением для зависимости $\delta_{cr}(\alpha)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенности развития процесса теплового взрыва в классических гомогенных смесях качественно отличаются от таковых при рассмотрении критических условий в гетерогенных системах с наличием автоторможения. Если в первом случае воспламенение происходит по механизму срыва стационарного режима, то во втором случае наблюдается переход от одного нестационарного режима к другому. Формирование слоя продукта, с одной стороны, обуславливает тепловыделение, а с другой — замедляет процесс его роста (автоторможение). Конкуренция указанных факторов и определяет структуру термограмм разогрева. Нижний температурный режим реализуется при доминировании с некоторого момента времени скорости кинетического торможения над скоростью тепловыделения. Как следствие, скорость разогрева системы на первом этапе возрастает, а затем уменьшается до тех пор, пока не сравняется со скоростью теплоотвода, что приводит к появлению максимума на термограмме. Таким образом, наличие максимума скорости разогрева (точки перегиба на термограмме) и максимума температуры на термограмме определяет нижний стационарный режим. Верхний температурный режим характеризуется превалированием скорости тепловыделения над скоростью кинетического торможения и скоростью теплоотвода, следовательно,

термограмма характеризуется монотонным ростом температуры. Переход от нижнего нестационарного режима к верхнему (критические условия теплового взрыва) определяется таким соотношением параметров системы, при котором нижний стационарный режим невозможен и скорость тепловыделения доминирует по отношению к факторам, препятствующим росту температуры. В данном случае качественное поведение системы определяется наличием или отсутствием точки максимума скорости разогрева на участке возрастания температуры. Касание изоклины перегибов и фазовой траектории определяет критические условия перехода от нижнего температурного режима к верхнему.

Сформулируем основные результаты работы.

- Установлено соотношение между кинетическим параметром и критерием Тодеса, определяющее границу вырождения теплового взрыва.

- Анализ траектории нижнего температурного режима позволил установить, что при определенном соотношении критерия Семенова и параметра самоторможения (произведение критерия Тодеса и кинетического параметра) на термограмме могут быть либо одна, либо две точки перегиба.

- Из вида функциональной зависимости критерия Семенова от параметра самоторможения на пределе воспламенения следует, что с ростом интенсивности кинетического торможения уменьшается теплоотвод, поскольку рост кинетического торможения реакции должен компенсироваться понижением скорости диссипации тепла в системе. Предельным значением параметра вырождения является единица, поскольку при больших его значениях происходит вырождение теплового взрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Итин В. И., Найбороденко Ю. С.** Высокотемпературный синтез интерметаллических соединений. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989.
2. **Мержанов А. Г.** Твердопламенное горение. — Черноголовка: ИСМАН, 2000.
3. **Лапшин О. В., Овчаренко В. Е.** Математическая модель высокотемпературного синтеза алюминиды никеля Ni_3Al в режиме теплового взрыва порошковой смеси чистых элементов // Физика горения и взрыва. — 1996. — Т. 32, № 3. — С. 68–76.
4. **Смоляков В. К., Некрасов Е. А., Максимов Ю. М.** Моделирование безгазового горения с фазовыми превращениями // Физика горения и взрыва. — 1984. — Т. 20, № 2. — С. 63–73.
5. **Евстигнеев В. В., Филимонов В. Ю., Кошелев К. Б.** Математическая модель процессов фазообразования в бинарной порошковой смеси $Ti-Al$ в режиме неадиабатического теплового взрыва // Физика горения и взрыва. — 2007. — Т. 43, № 2. — С. 52–57.
6. **Филимонов В. Ю.** Критерии тепловой устойчивости гетерогенных систем, окисляющихся по параболическому закону // Физика горения и взрыва. — 2006. — Т. 42, № 3. — С. 53–56.
7. **Розенбанд В. И., Черненко Е. В.** Расчет нижнего концентрационного предела самовоспламенения газозвеси и слоя порошка металла // Физика горения и взрыва. — 1982. — Т. 18, № 3. — С. 9–17.
8. **Семенов Н. Н.** Тепловая теория горения и взрывов // Успехи физ. наук. — 1940. — Т. 60, № 3. — С. 241–250.
9. **Мержанов А. Г., Абрамов В. Г., Гонтковская В. Т.** О закономерностях перехода от самовоспламенения к зажиганию // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 148, № 1. — С. 156–159.
10. **Алдушин А. П., Мартемьянова Т. М., Мержанов А. Г., Хайкин Б. И., Шкадинский К. Г.** Распространение фронта экзотермической реакции в конденсированных смесях при взаимодействии компонент через слой тугоплавкого продукта // Физика горения и взрыва. — 1972. — Т. 8, № 2. — С. 202–212.
11. **Мержанов А. Г., Озерковская Н. И., Шкадинский К. Г.** Динамика теплового взрыва в послейндукционный период // Физика горения и взрыва. — 1999. — Т. 35, № 6. — С. 65–70.
12. **Гонтковская В. Т., Городецков А. В., Перегудов А. Н., Барзыкин В. В.** Особенности теплового взрыва в системах с сильным самоторможением // Физика горения и взрыва. — 1996. — Т. 32, № 4. — С. 77–79.
13. **Йосс Ж., Джозеф Д.** Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. — М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 7/X 2009 г.,
в окончательном варианте — 9/II 2010 г.