ПМТФ, № 6, 1962

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА В АНИЗОТРОПНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В. Б. Баранов

(*Москва*)

Исследуется влияние анизотропии электропроводности и теплопроводности на распределение температуры в течении Куэтта между параллельными пластинами. Газ считается полностью ионизованным и вводится предположение о его несжимаемости. Рассмотрены два случая: магнитное поле перпендикулярно к пластинам и магнитное поле параллельно пластинам, но перпендикулярно к постоянной скорости верхней пластины.

Обозначения

v_x, v_y — составляющие скорости по соответствующим осям координат,
H_x, H_y — составляющие индуцированного магнитного поля,
j_x, j_y — составляющие плотности тока,
p — давление газа,
T — температура газа,
σ — электропроводность в отсутствие магнитного поля,
c — скорость света,
η — коэффициент вязкости,
M — число Гартмана,
ω_1 — циклотронная частота вращения электронов,
τ_1 — время «свободного пробега» электронов,
$\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля,
P — число Прандтля,
T_0 — характерная температура,
λ — коэффициент теплопроводности в отсутствие магнитного поля,
T_∞ — температура верхней пластины,
c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении,
ω_2 — циклотронная частота вращения ионов,
τ_2 — время «свободного пробега» ионов,
R_m — магнитное число Рейнольдса,
k — постоянная Больцмана,
e — величина заряда электрона,
K — параметр, характеризующий величину отношения членов с джоулевой диссипацией к членам, связанным с эффектами Томсона и Эттингсхаузена.

§ 1. Течение Куэтта. Магнитное поле перпендикулярно к пластинам. Рассмотрим течение полностью ионизованного газа между двумя параллельными пластинами, возникающее вследствие движения верхней пластины вдоль направления оси x с постоянной скоростью U. Нижняя пластина неподвижна и лежит в плоскости yx, а верхняя — в плоскости $z = h$. Приложенное магнитное поле $H_z = H_0$ постоянно и направлено вдоль оси z. Все параметры считаем зависящими только от координаты z.

Предположим, что газ несжимаем, σ, η — постоянные величины, а циклотронная частота вращения ионов мала по сравнению с частотой их «соударений» ($\omega_2\tau_2 \ll 1$). Тогда решение поставленной задачи для скорости и индуцированного магнитного поля можно получить из системы уравнений (1.4) — (1.7) в работе [1], если положить $\partial p / \partial x = \text{const} = 0$.

Используя для нашей задачи граничные условия

$$v_x = v_y = H_x = H_y = 0 \qquad \text{при } z = 0$$

$$v_x = U, \qquad \frac{4\pi}{c} j_x = -\frac{dH_y}{dz} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{aH_0}{1 + a^2H_0^2} UH_0$$

$$v_y = 0 \qquad \frac{4\pi}{c} j_y = \frac{dH_x}{dz} = -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{1}{1 + a^2H_0^2} UH_0 \qquad \text{при } z = h$$

решение получим в виде

$$v_x = U\,\frac{\cos\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha\cos\beta z^*\,\mathrm{sh}\,\alpha z^* + \sin\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha\sin\beta z^*\,\mathrm{ch}\,\alpha z^*}{\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta} \qquad (1.1)$$

$$v_y = U\,\frac{\cos\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha\sin\beta z^*\,\mathrm{ch}\,\alpha z^* - \sin\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta z^*\,\mathrm{sh}\,\alpha z^*}{\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta} \qquad (1.2)$$

$$H_x = \frac{4\pi\eta U}{H_0 h}\left[\frac{(\beta\cos\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha - \alpha\sin\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha)\sin\beta z^*\,\mathrm{sh}\,\alpha z^*}{\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha\cos\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha + \beta\sin\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha)(1 - \cos\beta z^*\,\mathrm{ch}\,\alpha z^*)}{\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta}\right] \qquad (1.3)$$

$$H_y = -\frac{4\pi\eta U}{H_0 h}\left[\frac{(\beta\sin\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha + \alpha\cos\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha)\sin\beta z^*\,\mathrm{sh}\,\alpha z^*}{\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha\sin\beta\,\mathrm{ch}\,\alpha - \beta\cos\beta\,\mathrm{sh}\,\alpha)(1 - \cos\beta z^*\,\mathrm{ch}\,\alpha z^*)}{\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta}\right] \qquad (1.4)$$

Здесь

$$z^* = \frac{z}{h}, \qquad \alpha = \frac{M}{\sqrt{1 + a^2 H_0^2}}\left(\frac{\sqrt{1 + a^2 H_0^2} + 1}{2}\right)^{1/2}$$

$$\beta = \frac{M}{\sqrt{1 + a^2 H_0^2}}\left(\frac{\sqrt{1 + a^2 H_0^2} - 1}{2}\right)^{1/2}, \qquad M = \frac{H_0 h}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$$

$$a = \frac{\omega_1\tau_1}{H}, \qquad H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_0^2}$$

В пределе при $\omega_1\tau_1 \to 0$ из (1.1) — (1.4) получим решение задачи о течении Куэтта для несжимаемой жидкости в магнитной гидродинамике, приведенное, например, в работе [2].

Решение задачи о течении Куэтта между коаксиальными цилиндрами при произвольных $\omega_1\tau_1$ в предположении малости магнитного числа Рейнольдса ($R_m \ll 1$) приведено в работе [3].

Формулы (1.1), (1.2) дают решение плоской задачи Куэтта при $R_m \ll 1$, если в них положить $aH_0 = \omega_1\tau_1$. Из уравнения энергии [4] для рассматриваемой задачи будем иметь ($E_x = E_y = 0$)

$$\lambda\frac{d^2T}{dz^2} + \eta\left[\left(\frac{dv_x}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dz}\right)^2\right] + \frac{H_0}{c}(j_x v_y - j_y v_x) = 0$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что индуцированными магнитными полями можно пренебречь ($R_m \ll 1$).

Подставляя в последнее уравнение выражения для плотности тока

$$j_x = \frac{\sigma H_0}{c(1 + \omega_1^2\tau_1^2)}(\omega_1\tau_1 v_x + v_y), \qquad j_y = \frac{\sigma H_0}{c(1 + \omega_1^2\tau_1^2)}(\omega_1\tau_1 v_y - v_x)$$

и переходя к безразмерному виду, получим

$$\frac{d^2T^*}{dz^{*2}} + P\frac{U^2}{c_p T_0}\left[\frac{M^2}{1 + \omega_1^2\tau_1^2}(v_x^{*2} + v_y^{*2}) + \left(\frac{dv_x^*}{dz^*}\right)^2 + \left(\frac{dv_y^*}{dz^*}\right)^2\right] = 0$$

Здесь

$$v_x^* = \frac{v_x}{U}, \qquad v_y^* = \frac{v_y}{U}, \qquad T^* = \frac{T}{T_0}, \qquad P = \frac{\eta c_p}{\lambda}$$

Используя (1.1), (1.2), уравнение энергии перепишем в виде

$$\frac{d^2T^*}{dz^{*2}} + P\frac{U^2}{c_p T_0}\frac{M^2}{(1 + \omega_1^2\tau_1^2)(\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)}[\mathrm{sh}^2\alpha z^* + \sin^2\beta z^* +$$
$$+ \sqrt{1 + \omega_1^2\tau_1^2}\,(\mathrm{sh}^2\alpha z^* + \cos^2\beta z^*)] = 0$$

Решение этого уравнения запишется

$$T^* = -P \frac{U^2}{2c_pT_0} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha z^* + \sin^2 \beta z^*}{\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta} + C_1 z^* + C_2$$

Здесь C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.
При граничных условиях

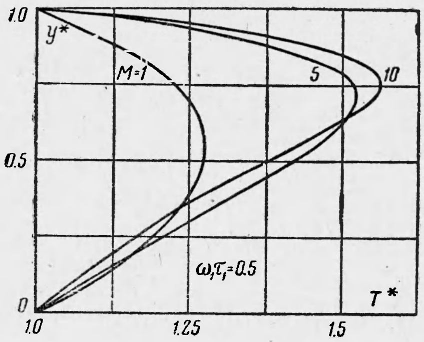
$$T^* = 1 \quad \text{при } z^* = 0, \qquad T^* = \frac{T_\infty}{T_0} \quad \text{при } z^* = 1$$

получим

$$T^* = \frac{PU^2}{2c_pT_0}\left(z^* - \frac{\sin^2 \alpha z^* + \sin^2 \beta z^*}{\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta}\right) + \left(\frac{T_\infty}{T_0} - 1\right) z^* + 1 \tag{1.5}$$

Отсюда легко видеть, что значение производной

$$\left.\frac{dT^*}{dz^*}\right|_{z^*=0} = \frac{PU^2}{2c_pT_0} + \frac{T_\infty}{T_0} - 1$$



Фиг. 1

т. е. градиент температуры на нижней пластине, не зависит ни от числа Гартмана, ни от параметра $\omega_1\tau_1$. Это означает, что тепловой поток на нижнюю пластину не зависит от магнитного поля.

Характер зависимости скорости от числа M и от $\omega_1\tau_1$ качественно такой же, как и в течении Гартмана с анизотропной проводимостью [1]. С увеличением M градиент скорости вдоль оси x на нижней пластине уменьшается за счет торможения в магнитном поле, увеличение $\omega_1\tau_1$ при фиксированном M приводит к увеличению градиента скорости на нижней пластине за счет уменьшения токов вдоль оси y. При $\omega_1\tau_1 \to \infty$ профиль скорости v_x стремится к линейному ($v_y \to 0$ при $\omega_1\tau_1 \to \infty$).

§ 2. Течение Куэтта. Магнитное поле параллельно пластинам и перпендикулярно к скорости верхней пластины. Предположим теперь, что нижняя пластина лежит в плоскости xz, а верхняя — в плоскости yh и движется с постоянной скоростью U вдоль оси x. Магнитное поле задано ($R_m \ll 1$), постоянно и направлено вдоль оси z ($H_z = H_0$). Совместное решение уравнений движения и обобщенного закона Ома можно получить из соответствующих решений в работе [5], если в них положить $\omega_2\tau_2 = 0$. Тогда решение примет вид

$$v_x = U\frac{y}{h} + \frac{j_y H_0 h}{2c\eta}\, y\left(1 - \frac{y}{h}\right) \tag{2.1}$$

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{1}{c} j_x H_0, \qquad j_x = -\omega_1\tau_1 j_y \tag{2.2}$$

$$j_y = \frac{\sigma}{1 + {}^1/_2\,\omega_1^2\tau_1^2}\left(E_y - \frac{1}{c} v_x H_0\right) = \text{const} \tag{2.3}$$

Так как магнитное поле направлено вдоль оси z, то все параметры считаются зависящими только от y.

Для случая хорошо проводящих пластин, когда их сопротивлением можно пренебречь по сравнению с сопротивлением газа, для плотности тока j_y получим выражение

$$j_y = -\frac{\sigma U H_0}{2c\,(1 + {}^1/_2\omega_1^2\tau_1^2)}\left[1 + \frac{\sigma H_0^2 h^2}{12c^2\eta\,(1 + {}^1/_2\omega_1^2\tau_1^2)}\right]^{-1} \tag{2.4}$$

Уравнение энергии для рассматриваемой задачи будет иметь вид

$$\lambda\varkappa\frac{d^2T}{dy^2}+\eta\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2+\frac{(1+{}^1/_2\omega_1{}^2\tau_1{}^2)}{\sigma}j_y{}^2+\frac{d}{dy}(\lambda\iota' j_y)+\frac{d}{dy}(\lambda\omega_1\tau_1\iota'' j_x)=0 \qquad (2.5)$$

Здесь

$$\varkappa=(1.47\omega_1{}^2\tau_1{}^2+3.77)\,\Delta_1, \qquad \iota'=(1.58\omega_1{}^4\tau_1{}^4+26.6\omega_1{}^2\tau_1{}^2+7.66)\frac{TH_0\Delta_1}{\omega_1\tau_1 pc}$$

$$\iota''=(0.949\omega_1{}^2\tau_1{}^2+1.93)\frac{TH_0\Delta_1}{\omega_1\tau_1 pc}, \qquad \frac{1}{\Delta_1}=\omega_1{}^4\tau_1{}^4+14.79\omega_1{}^2\tau_1{}^2+3.77 \qquad (2.6)$$

Эти формулы получаются из соответствующих формул в работе [4] при $\omega_2\tau_2=0$.

Два последних члена в (2.5) определяют влияние эффектов Томсона и Эттингсхаузена на распределение температуры в куэттовском течении.

Используя (2.1) — (2.3), (2.6), из уравнения (2.5) получим

$$\lambda\varkappa\frac{d^2T}{dy^2}+1.58\frac{k}{e}j_y\frac{0.631\omega_1{}^4\tau_1{}^4+24.7\omega_1{}^2\tau_1{}^2+7.66}{\omega_1{}^4\tau_1{}^4+14.79\omega_1{}^2\tau_1{}^2+3.77}\frac{dT}{dy}+$$

$$+\eta\left[\frac{U}{h}+\frac{j_yH_0h}{2c\eta}\left(1-2\frac{y}{h}\right)\right]^2+\frac{1+{}^1/_2\omega_1{}^2\tau_1{}^2}{\sigma}j_y^2=0 \qquad (2.7)$$

Решение уравнения (2.7) при граничных условиях

$$T=T_0 \quad \text{при } y=0, \qquad T=T_\infty \quad \text{при } y=h$$

в безразмерном виде будет иметь вид

$$T^*=-\left(l_1+l_2+l_3+1-\frac{T_\infty}{T_0}\right)\frac{e^{-l_4y^*}-1}{e^{-l_4}-1}+(l_1y^{*2}+l_2y^*+l_3)\,y^*+1 \qquad (2.8)$$

Здесь введены обозначения

$$T^*=\frac{T}{T_0}, \qquad y^*=\frac{y}{h}, \qquad l_1=\frac{LK}{3\cdot 1.58f}$$

$$l_2=\frac{K}{1.58f}\left(1-\frac{1}{2}L\right)+\frac{\varkappa}{P}\frac{c_pT_0}{U^2}\frac{K^2}{(1.58f)^2}$$

$$l_3=\frac{K}{1.58f}\left(\frac{0.5}{1+{}^1/_{12}M^{\circ 2}}-1+\frac{1}{4}L+\frac{1}{L}\right)+$$

$$+\frac{2K^2}{(1.58f)^2}\frac{\varkappa}{P}\frac{c_pT_0}{U^2}\frac{1}{L}\left(1-\frac{1}{2}L+\frac{K}{1.58f}\frac{\varkappa}{P}\frac{c_pT_0}{U^2}\right)$$

$$l_4=-\frac{1.58f}{K}\frac{P}{\varkappa}\frac{U^2}{c_pT_0}L, \qquad K=\frac{eUH_0h}{ckT_0}$$

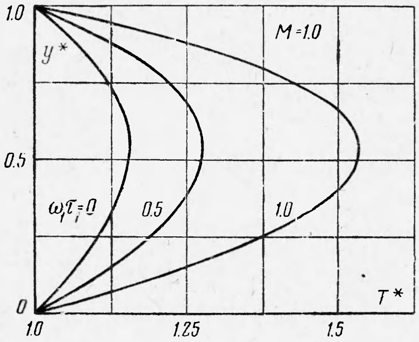
$$M^\circ=\frac{M}{\sqrt{1+0.5\omega_1{}^2\tau_1{}^2}}, \qquad L=\frac{{}^1/_2M^{\circ 2}}{1+{}^1/_{12}M^{\circ 2}}, \qquad f=\frac{0.631\omega_1{}^4\tau_1{}^4+24.7\omega_1{}^2\tau_1{}^2+7.66}{\omega_1{}^4\tau_1{}^4+14.79\omega_1{}^2\tau_1{}^2+3.77}$$

На фиг. 1—3 приведены профили температуры при различных значениях параметров M, $\omega_1\tau_1$ и K. Расчеты были проведены по формуле (2.8) при $PU^2/c_pT_0=T_\infty/T_0=1$. Из фиг. 1 видно, что увеличение числа M приводит к уменьшению градиента температуры около неподвижной пластины, с увеличением параметра $\omega_1\tau_1$ при фиксированном M градиент температуры, как видно из фиг. 2, возрастает. На фиг. 3 приведены графики, иллюстрирующие влияние членов, связанных с эффектами Томсона и Эттингсхаузена.

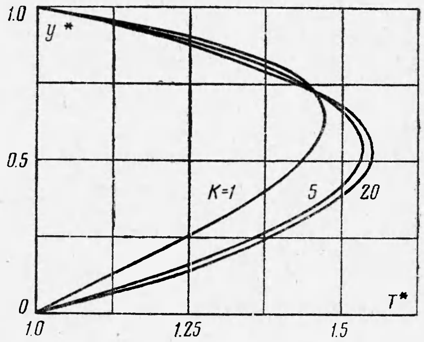
Из формулы (2.1), которую можно переписать при использовании (2.4) в виде

$$v_x=U\left[y^*-\frac{1}{4}\frac{M^{\circ 2}}{1+{}^1/_{12}M^{\circ 2}}y^*(1-y^*)\right] \qquad (2.9)$$

следует, что при малых значениях M профиль скорости близок к линейному. С увеличением M профиль скорости искривляется так, что градиент скорости на нижней пластине уменьшается, обращаясь в нуль при



Фиг. 2



Фиг. 3

$M^\circ = \sqrt{6}$. Из (2.9) также следует, что при $\omega_1\tau_1 \to \infty$ (M — фиксировано) профиль скорости также стремится к линейному.

Поступила 13 IX 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов В. Б. Установившееся течение ионизованного газа в плоском канале с учетом анизотропии проводимости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
2. Блевисс Ц. Магнитогазодинамика гиперзвукового течения Куэтта. Механика. ИЛ, 1959, № 3.
3. Чекмарев И. Б. Влияние анизотропии проводимости на стационарное течение несжимаемого вязкого ионизованного газа между коаксиальными цилиндрами при наличии магнитного поля. Науч.-техн. информац. бюлл. Ленингр. политехн. ин-т им. М. И. Калинина, 1960, № 7.
4. Баранов В. Б. К выводу уравнений анизотропной магнитной гидродинамики. ПММ, 1962, XXVI, вып. 6.
5. Губанов А. И., Лунькин Ю. П. Куэттовское течение в магнитной плазмодинамике. ЖТФ, 1960, т. XXX, вып. 9.