

УДК 532.685, 533.15

**ВЛИЯНИЕ НЕРАВНОВЕСНОСТИ ДЕСОРБЦИИ НА СТРУКТУРУ  
УДАРНЫХ ВОЛН И ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ В УГОЛЬНОМ ПЛАСТЕ**

**А. В. Федоров, А. В. Шульгин**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,  
E-mail: fedorov@itam.nsc.ru,  
ул. Институтская, 4/1, 630090, Новосибирск, Россия*

Предложена физико-математическая модель, описывающая процессы неравновесной фильтрации и диффузии свободного и сорбированного газа в угольном пласте в рамках механики гетерогенных сред с учетом физической десорбции. Модель представляет собой систему неоднородных параболических уравнений с жестким источником членом. На примере задач о распространении волн сжатия и разрежения выявлено влияние неравновесной десорбции на ширину этих волновых процессов. Решена задача об иницировании и устойчивости ударной волны, распространяющейся в массиве угля.

*Неравновесная кинетика десорбции метана, ударные волны, волны разрежения*

При фильтрации метана в угольных пластах возникают различные нелинейные процессы, осложненные неравновесной кинетикой десорбции. Впервые на это было указано в работах [1, 2] и построены соответствующие решения начально-краевых задач для однородных уравнений параболического типа, описывающие явление дегазации, распространения ударных волн и волн разрежения. Нами предложены математические модели, которые принимают во внимание неравновесную кинетику десорбции. Исследуем влияние неравновесности на распространение волновых процессов в угольном пласте.

Система уравнений для описания процессов фильтрации и диффузии свободного и сорбированного метана в угольном пласте имеет вид [3]:

$$\frac{\partial t\rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda\rho \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{\tau} [\rho_1^{(2)} - \varphi(p)], \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_1^{(2)}}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_1^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \rho_1^{(2)}}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\tau} [\rho_1^{(2)} - \varphi(p)].$$

Здесь  $\rho$  — истинная плотность свободного газа;  $t$  — пористость угля;  $\lambda$  — коэффициент фильтрации газа;  $p$  — давление в свободном газе;  $\tau$  — время релаксации процесса десорбции;  $\rho_1^{(2)}$  — средняя плотность сорбированного газа;  $\varphi(p)$  — изотерма сорбции;  $u$  — скорость пе-

реноса сорбированного газа;  $D$  — коэффициент диффузии метана в угле. Система дополняется изотермическим уравнением состояния  $p = c^2 \rho$ , где  $c$  — скорость звука, и является замкнутой для определения плотности и давления свободного и средней плотности сорбированного газа.

**Равновесное приближение.** Для случая равновесного течения, т. е. при  $\tau = 0$ , система (1) переходит в нелинейное уравнение параболического типа для определения параметров фильтрации и диффузии газа, находящегося в двух состояниях в пористом пласте:

$$\frac{\partial(m\rho + \varphi)}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \lambda \rho + D \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right]. \quad (2)$$

Введя автомодельную переменную  $\xi = x - vt$ , где  $v$  — скорость распространения волны, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, которое с учетом условий стационарности:  $p \rightarrow p_{1,2}$ ,  $p_2 > p_1$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , имеет решение [3]

$$A \ln|\rho - \rho_2| + B \ln|\rho - \rho_1| = \xi, \quad A = \frac{\rho_2}{a_1(\rho_2 - \rho_1)}, \quad B = -\frac{\rho_1}{a_1(\rho_2 - \rho_1)}. \quad (3)$$

Скорость распространения волны при этом определяется соотношением

$$v = u \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{m(\rho_1 - \rho_2) + (\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (4)$$

Далее воспользуемся этим решением в качестве калибровочного.

**Неравновесное приближение.** Рассмотрим следующую физическую проблему. Допустим, что в начальный момент времени в бесконечном угольном пласте сформировался разрыв давления и соответственно разрыв средней плотности сорбированного газа. Выше мы представили аналитическое автомодельное решение подобной задачи в случае времени релаксации равно нулю. Это решение показывает, что в равновесном приближении оно описывает распространение нелинейного волнового процесса в пласте. В неравновесном случае можно также найти автомодельное решение сформулированной задачи. Поиск подобного аналитического решения приводит к решению краевой задачи для автономной системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, сводящемуся к качественному анализу особых точек. Подвергнем анализу данную физическую задачу на основе численного метода путем расчета на установления. Введем безразмерные переменные:

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{D} = \frac{D}{D_0}$$

и перепишем (1) в этих переменных в следующем виде (черточки над безразмерными переменными в дальнейшем опускаем):

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{1}{\tau} [\rho_1^{(2)} - \varphi(p)], \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_1^{(2)}}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_1^{(2)}}{\partial x} = D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho_1^{(2)}}{\partial x} \right) - \frac{1}{\tau} [\rho_1^{(2)} - \varphi(p)].$$

Начальные данные определяются из условия равновесности процесса десорбции в данный момент времени, т. е. берутся в виде

$$\rho(x,0) = \rho_2, \quad -\infty \leq x \leq x_*, \quad \rho(x,0) = \rho_1, \quad x_* \leq x \leq +\infty, \quad (6)$$

$$\rho_1^{(2)}(x,0) = \varphi(p_2), \quad -\infty \leq x \leq x_*, \quad \rho_1^{(2)}(x,0) = \varphi(p_1), \quad x_* \leq x \leq +\infty,$$

где  $x_*$  — координата точки разрыва давления, а граничные условия — в виде

$$\begin{aligned} \rho(-\infty, t) &= \rho_2, \quad \rho(+\infty, t) = \rho_1, \\ \rho_1^{(2)}(-\infty, t) &= \varphi(p_2), \quad \rho_1^{(2)}(+\infty, t) = \varphi(p_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Начально-краевая задача (5)–(7) для системы уравнений в частных производных параболического типа решалась методом прямых с использованием метода обратного дифференцирования [4].

В расчетах использованы следующие значения физических параметров: давление справа от точки разрыва  $p_1 = 101325$  Па, давление слева от точки разрыва  $p_2 = 1013250$  Па, плотность метана  $\rho = 0.65$  кг/м<sup>3</sup>, пористость  $m = 0.05$ , проницаемость  $\lambda = 5 \cdot 10^{-10}$  м<sup>3</sup>·с/кг, коэффициент диффузии метана  $D = 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/с, скорость переноса  $u = 0.01$  м/с, скорость звука  $c = 450$  м/с; значения параметров, с помощью которых проводилось обезразмеривание: расстояние  $x_0 = 1$  м, скорость  $u_0 = 0.01$  м/с, время  $t_0 = x_0/u_0 = 100$  с, плотность  $\rho_0 = 0.65$  кг/м<sup>3</sup>, давление  $p_0 = \rho_0 c^2 = 131625$  Па, проницаемость  $\lambda_0 = u_0 x_0 / p_0 = 9.869 \cdot 10^{-8}$  м<sup>3</sup>·с/кг, диффузия  $D_0 = x_0^2 / t_0 = 10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с. Обсудим некоторые данные расчетов при различных изотермах сорбции.

**Изотерма сорбции Фрейндлиха с показателем степени  $n = 2$  для математической модели (5).** Рассмотрим случай изотермы сорбции Фрейндлиха с показателем  $n = 2$ , а именно:  $\varphi = ap^2$ ,  $a = 1.26 \cdot 10^{-10}$  с<sup>4</sup>/(кг·м). Приведем результаты расчетов задачи (5)–(7) для значений безразмерного параметра релаксации  $\tau = 10; 1; 0.1; 0.01$ . В этом случае по угольному пласту распространяется нелинейный волновой процесс в виде ударной волны [3]. На рис. 1 показан процесс формирования фронта волны для  $\tau = 0.1$  при безразмерных временах  $0 \leq t \leq 1$  для средней плотности сорбированной фазы  $\rho_1^{(2)}$  (для  $\rho$  картина аналогична), а динамика дальнейшего развития волны представлена на рис. 2 (каждая кривая изображена через  $t = 1$ ).

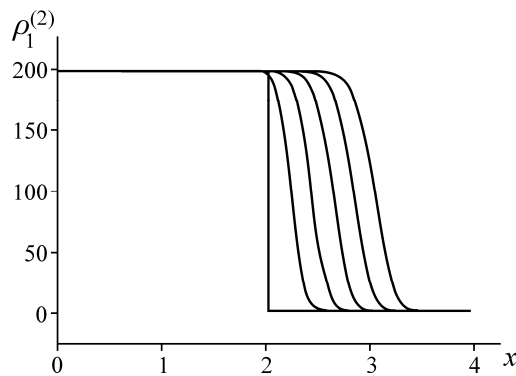


Рис. 1. Формирование фронта ударной волны для изотермы сорбции Фрейндлиха с показателем степени  $n = 2$

Как видно, фронт волны формируется довольно быстро. За счет диссипативных процессов: диффузии и фильтрации, а также неравновесности процесса десорбции он размывается. В данном случае переход из равновесного состояния занимает конечное время, что приводит к росту времени установления. После установления профиля волны десорбции он распространяется далее в неизменном виде. Штриховой линией на рис. 2 показано аналитическое стационарное решение, полученное при времени релаксации равном нулю. Очевидно, что установив-

шийся расчетный профиль волны близок к стационарному. Это не является неожиданным, поскольку время релаксации в данном случае весьма мало, т. е. полученное решение не должно сильно отличаться от равновесного.

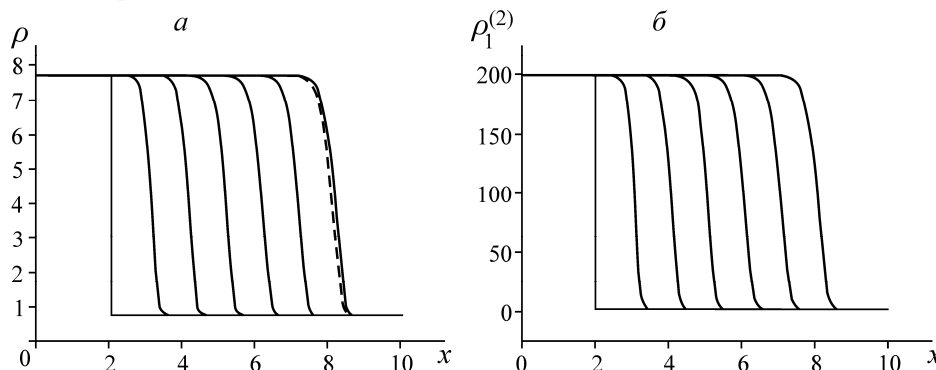


Рис. 2. Динамика распространения ударной волны для случая изотермы Фрейдлиха с показателем степени  $n = 2$

На рис. 3 приведены плотности свободного газа на момент времени  $t = 6$  в зависимости от параметра  $\tau$ . Видно, что рост времени перехода газа из сорбированного состояния в свободное приводит к значительному размазыванию профиля волны.

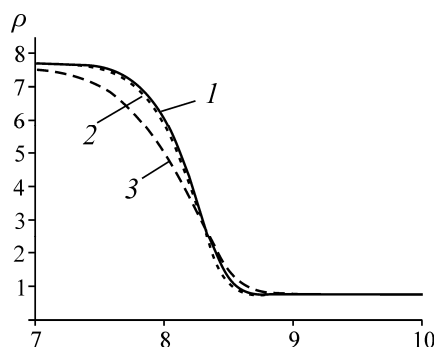


Рис. 3. Плотности свободного газа на момент времени  $t = 6$  в зависимости от параметра  $\tau$ : 1 —  $\tau = 1$ ; 2 —  $\tau = 10$ , 3 —  $\tau = 100$

Зависимость ширины волны по Прандтлю, определяемая по формуле  $L_{Pr} = (p_2 - p_1) \max|dp/dx|$  от значения параметра  $\tau$ :

$\tau$	0	0.01	0.1	1	10	100
$L_{Pr}$	0.563352	0.565047	0.566774	0.573380	0.630951	0.875960

С увеличением значения времени релаксации ширина волны увеличивается. При  $\tau \rightarrow \infty$  волна существует только для сорбированного газа за счет наличия конвективного члена, а свободный газ вытекает из зоны повышенного давления и уходит в пласт с более низким давлением.

**Устойчивость профиля неравновесной ударной волны.** Решалась также задача об устойчивости стационарного профиля. Полученное стационарное решение использовали в качестве данных Коши и проводили расчет для больших времен. Оказалось, что этот профиль воспроизводится на большие времена стационарно. Далее проводился расчет подобной задачи Коши с возмущенным профилем как инфинитезимальными, так и конечными возмущениями.

Достигнут ожидаемый результат. Ударная волна оказалась устойчивой относительно обоих видов возмущений. При этом амплитуда возмущений с ростом времени убывала и после некоторого момента времени исчезала полностью.

**Изотерма сорбции Фрейндлиха с показателем степени  $n = 1/2$  для математической модели (5).** Рассмотрим случай изотермы сорбции Фрейндлиха с показателем  $n = 1/2$ :  $\varphi = a\sqrt{p}$ ,  $a = 0.004084 \text{ с}\cdot\text{кг}^{1/2}/\text{м}^{5/2}$ . Для этой изотермы имеет место распространение волны разрежения по угольному пласту [3]. Профили плотности свободного и сорбированного газа для  $\tau = 0.1$  приведены на рис. 4, временной шаг вывода результатов  $t = 1$ .

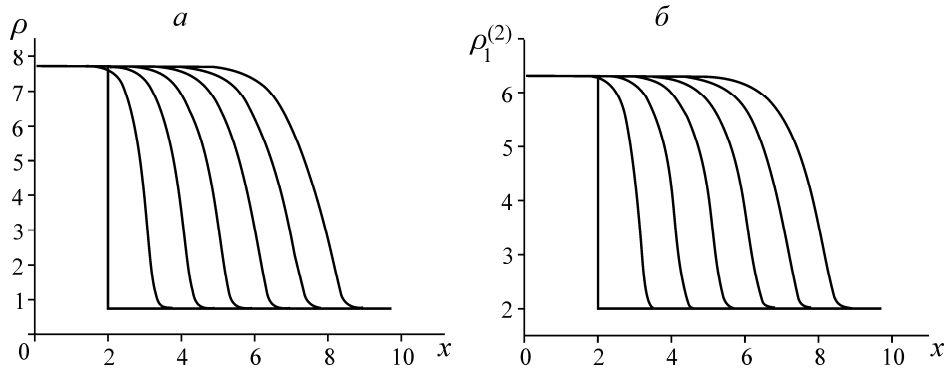


Рис. 4. Динамика распространения волны разрежения для случая изотермы Фрейндлиха с показателем степени  $n = 1/2$

Для волны разрежения ее профиль со временем размывается. Зависимость ширины волны разрежения  $L$  от времени представлена в таблице для значений  $\tau = 0.1$ ; 1 и на рис. 5 для  $\tau = 0$ ; 0.1; 1.

Параметр	$\tau = 0.1$					$\tau = 1$					
	$t$	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
$L$		2.9	3.3	3.7	4.1	4.5	3.9	4.3	4.7	5.1	5.5

Также на рис. 5 показана зависимость ширины равновесной волны разрежения в случае изотермы Ленгмюра из работы [3]. Видно, что с увеличением времени релаксации фронт волны размывается сильнее, а ширина волны при  $\tau = 0$  в случае изотермы Ленгмюра меньше, чем для изотермы Фрейндлиха.

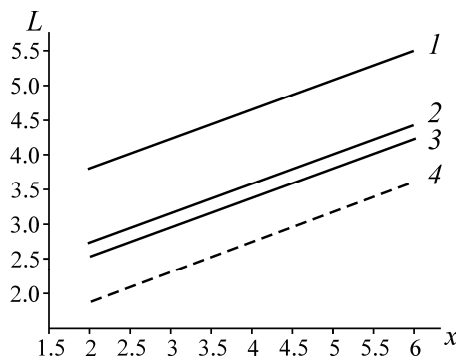


Рис. 5. Зависимость длины волны разрежения от времени. Сплошные линии — изотерма Фрейндлиха с показателем степени  $n = 1/2$ , штриховая — Ленгмюра: 1 —  $\tau = 1$ ; 2 —  $\tau = 0.1$ ; 3, 4 —  $\tau = 0$

Актуальность рассмотрения данных задач обусловлена трактовкой С. А. Христиановича подобных нелинейных течений газа в угольных пластах как волн дробления при внезапных выбросах угля и газа. При этом рассмотренное течение является первым инициирующим этапом данной волны дробления, обусловленным возможным выходом этого процесса на свободную поверхность.

#### **ВЫВОДЫ**

На основе физико-математической модели фильтрации и диффузии свободного и сорбированного газа в угольном пласте с учетом неравновесности процесса десорбции показано существенное влияние последнего на структуру ударной волны и волны разрежения. Оказалось, что по сравнению с изотермой Фрейндлиха наименьшей шириной волны разрежения обладают угольные пласты с сорбционными эффектами, описываемыми изотермой Ленгмюра.

#### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Кричевский Р. М.** О выделении метана из угольных шахт в подготовительные выработки // Бюл. МакНИИ. — 1947. — № 16.
2. **Христианович С. А.** Распределение давления газа вблизи движущейся свободной поверхности угля // Изв. АН СССР, ОТН. — 1953. — № 12.
3. **Федоров А. В., Федорченко И. А.** Математическое моделирование распространения метана в угольных пластах // ФТПРПИ. — 2009. — № 1.
4. **Холл Дж. Уатт Дж.** Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1979.

*Поступила 11/IX 2014*