

**ВАРИАНТ МЕТОДА КОРРЕКЦИИ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТОВ
НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ СВЯЗНОСТИ
СОСТАВЛЯЮЩИХ КОМПОНЕНТОВ**

УДК 539.374

Л. А. Сараев, И. С. Макарова

Самарский государственный университет, 443011 Самара

Точному решению задачи определения эффективных пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов, помимо нелинейности исходных локальных определяющих уравнений, препятствует ограниченность статистической информации об их структуре. Поэтому при вычислении макроскопических характеристик композитов можно либо находить их верхнюю и нижнюю оценки (вилка типа Хашина — Штрикмана) [1], либо получать приближенные модели. Одним из путей учета данных о структуре композита и повышения точности расчетной модели является способ разложения моментных функций в ряд [2]. Однако он требует знания многоточечных корреляционных моментов, что весьма затруднительно сделать на практике [3].

Другой путь построения уточненной модели макроскопического поведения композиционного материала состоит в адекватной оценке связности составляющих компонентов, которая зависит от обоснованного выбора параметров тела сравнения [4].

В данной работе предложен вариант статистического метода осреднения системы уравнений равновесия упругопластического изотропного многокомпонентного композиционного материала для построения его макроскопических определяющих уравнений. Для описания геометрических особенностей структуры композита в исходные локальные определяющие соотношения вводится параметр, характеризующий степень связности компонентов, что позволяет с помощью предложенного метода описывать нелинейное упрочнение композита за пределом упругости и вычислять его эффективные характеристики.

Система макроскопических определяющих уравнений для упругопластического изотропного композиционного материала, образованного n различными компонентами, устанавливается путем статистического осреднения уравнений равновесия в перемещениях и имеет вид [4]

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\mu^*(e_s)\langle e_{ij} \rangle, \quad \langle \sigma_{pp} \rangle = 3K^*(e_s)\langle \varepsilon_{pp} \rangle, \quad (1)$$

где

$$\mu^* = \mu \frac{(1-\alpha)\xi}{1-\alpha\xi}; \quad \xi = \sum_{s=1}^n \frac{c_s \mu_s(e_s)}{\mu(1-\alpha) + \alpha \mu_s(e_s)};$$

$$K^* = K \frac{(1-\gamma)\eta}{1-\gamma\eta}; \quad \eta = \sum_{s=1}^n \frac{c_s K_s}{K(1-\gamma) + \gamma K_s}; \quad e_s = \frac{(1-\alpha)\mu + \alpha\mu^*}{(1-\alpha)\mu + \alpha\mu_s(e_s)} e;$$

$\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций; $s_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\sigma_{pp}$; $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\delta_{ij}\varepsilon_{pp}$; $\mu_s(e_s)$ — модуль пластичности s -го компонента; K_s — его объемный модуль ($K_s = \text{const}$); c_s — объемное содержание s -го компонента; μ, K — параметры тела сравнения; $\alpha = 2(4 - 5\nu)/[15(1 - \nu)]$; $\gamma = (1 + \nu)/[3(1 - \nu)]$; $\nu = (3K - 2\nu)/(6K + 2\mu)$; $e_s = \sqrt{\langle e_{kl} \rangle_s \langle e_{kl} \rangle_s}$; $e = \sqrt{\langle e_{kl} \rangle \langle e_{kl} \rangle}$, угловыми скобками обозначена операция осреднения по объемам компонентов и полному объему композита.

Выбор параметров тела сравнения заключается в определении зависимости μ и K от модулей компонентов μ_s , K_s и концентраций c_s . Из соображений размерности следует, что эта зависимость относительно модулей компонентов должна быть линейной, и в общем случае ее можно представить в виде

$$\mu = \sum_{s=1}^n \mu_s(e_s) p_s(c_s), \quad K = \sum_{s=1}^n K_s p_s(c_s). \quad (2)$$

Здесь $p_s(c_s)$ — функции, определяющие связность составляющих компонентов. Рассмотренные в [4] три типа связности составляющих компонентов являются частными случаями применения общих формул (2). В самом деле, если $p_1 = 1$, $p_s = 0$ ($s = 2, 3, \dots, n$), то $\mu = \mu_1$, $K = K_1$ и получается модель композита, в котором первый компонент играет роль связующей матрицы, а остальные — роль отдельных включений. Если же положить $p_s = c_s$ ($s = 1, 2, \dots, n$), то

$$\mu = \langle \mu \rangle, \quad K = \langle K \rangle$$

и система (2) описывает поведение многофазной смеси, в которой компоненты образуют взаимопроникающие каркасы. Наконец, если принять $p_s = c_s$ ($s = 1, 2, \dots, m$), $p_s = 0$ ($s = m + 1, m + 2, \dots, n$), то $\mu = \sum_{s=1}^m c_s \mu_s$, $K = \sum_{s=1}^m c_s K_s$ и получается модель композиционного материала, в котором матрица образована первыми m взаимопроникающими компонентами, а остальные ($n - m$) компонентов представляют собой отдельные включения.

Таким образом, выбор величин μ и K сводится к нахождению функций $p_s(c_s)$, которые не являются независимыми и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{s=1}^n p_s = 1, \quad (3)$$

вытекающему из формул (2), если в них положить $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$, $K_1 = K_2 = \dots = K_n = K$. Значения p_s не зависят от деформированного состояния компонентов композита и остаются неизменными в процессе нагружения от начального до предельного моментов деформирования. Поскольку для малых упругопластических деформаций структура композиционного материала не изменяется, то очевидно, что величины p_s можно определять в упругой области деформирования, а затем использовать их во всем диапазоне изменения деформаций. Следовательно, для адекватного описания упругопластического поведения композитов необходима дополнительная информация об их эффективных упругих свойствах, поэтому в дальнейшем предполагаются известными экспериментальные значения эффективных модулей упругости композита μ_{exp} , K_{exp} . С помощью общих уравнений (1) составляется целевая функция

$$W(p_s) = (\mu_e^* - \mu_{\text{exp}})^2 + (K_e^* - K_{\text{exp}})^2 \quad (4)$$

$$(\mu_e^* = \mu_e(1 - \alpha_e)\xi_e/(1 - \alpha_e\xi_e), \quad K_e^* = K_e(1 - \gamma_e)\eta_e/(1 - \gamma_e\eta_e)),$$

минимизация которой при условии (3) с использованием соотношений (2) определяет значения параметров связности p_s , которые применяются в дальнейшем при расчете упругопластического поведения композита. Здесь индекс e относится к значениям величин в области упругих деформаций.

Описанную процедуру оценки связности компонентов используем для уточнения расчетов упругопластического деформирования двухкомпонентного композиционного материала, содержащего отдельные включения. В этом случае соотношения (2) принимают вид

$$\mu = \mu_1(1 - p) + \mu_2 p, \quad K = K_1(1 - p) + K_2 p, \quad p = p_2 \quad (0 \leq p \leq 1), \quad (5)$$

а участок диаграммы растяжения материала матрицы аппроксимируется экспоненциальной зависимостью

$$\sigma = s_1 \left(1 - \exp \left(- \frac{E_1}{s_1} \varepsilon \right) \right), \quad (6)$$

где σ, ε — напряжения и деформации растяжения; E_1 — модуль Юнга материала матрицы; s_1 — предельное напряжение на участке диаграммы растяжения материала матрицы (предел текучести).

Параметр связности p получается в результате численного решения системы уравнений (4), (5). Далее упругопластическое поведение композита рассчитывается с помощью формул (1) и с учетом зависимости (6). При этом на каждом шаге макроскопических упругопластических деформаций значения e_s находятся численно на ЭВМ методом последовательных приближений.

Расчеты сравнивались с известной моделью матрица — сферические включения ($p = 0$) и с экспериментальными данными по растяжению образцов из эпоксидной смолы, наполненной стеклянными микросферами [5]. Поведение включений принималось идеально упругим. Объемное содержание стекла $c_2 = 0,24$. Экспериментальное значение эффективного модуля Юнга $E_{\text{exp}}^* = 6129$ МПа. Расчетные значения величин следующие: $E_1 = 3069$ МПа, $E_2 = 73545$ МПа, $\nu_1 = 0,45$, $\nu_2 = 0,21$, $s_1 = 69$ МПа. Вычисленное значение параметра связности $p = 0,264$.

На рис. 1 сравниваются результаты расчетов по формулам (1), (5), (6) (линия 1) с экспериментальной кривой деформирования эпоксидной смолы, наполненной стеклянными микросферами [5] (линия 2), и с результатами расчетов по модели матрица — сферические включения ($p = 0$) (линия 3).

Таким образом, учет дополнительной информации об эффективных упругих свойствах композита значительно уточняет модель неупругого деформирования и дает лучшее соответствие экспериментальных данных теоретическим.

Разориентированное армирование композиционных материалов короткими волокнами или частицами приводит к его макроскопической анизотропии, поэтому предложенная выше модель в этом случае непригодна.

Для адекватного описания хаотически армированных композитов при статистическом осреднении системы уравнений равновесия следует учитывать форму включений и статистическое распределение их ориентаций в матрице. Если форму волокон или частиц аппроксимировать эллипсоидами с заданным отношением полуосей, то определяющие уравнения макроскопического упругопластического деформирования такого композита имеют вид [6]

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = E_{ijkl}^*(e_{m,f})(\varepsilon_{kl}), \quad (7)$$

где

$$E_{ijkl}^* = 2\mu_m I_{ijkl} + \delta_{ij}\delta_{kl}\lambda_m + c_f(2[\mu]I_{ijpq} + \delta_{ij}\delta_{pq}[\lambda])a_{pqkl};$$

$$a_{ijkl} = (I_{ijpq} + R_{ijpq})^{-1}R_{pqkl}; \quad R_{ijkl} = (c_f c_m)^{-1} \sum_{s=1}^n c_s Q_{ijkl}^{(s)}, \quad Q_{ijkl}^{(s)} = (I_{ijkl} + P_{ijkl}^{(s)})^{-1};$$

$$P_{ijkl}^{(s)} = \frac{1}{2\mu_m} (2[\mu]Z_{ijkl}^{(s)} + \delta_{kl}[\lambda]Z_{ijpp}^{(s)}); \quad Z_{ijkl}^{(s)} = S_{ijki}^{(s)} - \frac{\nu_m}{1 + \nu_m} S_{ppkl}^{(s)} \delta_{ij};$$

$S_{ijkl}^{(s)}$ — компоненты тензора Эшелби, записанные в лабораторной системе координат эллипсоидов s -го направления; $[g] = g_f - g_m$; $\lambda = K - (2/3)\mu$; $c_{f,m}$ — объемные содержания включений и матрицы; c_s — объемное содержание эллипсоидов s -го направления; индекс t относится к материалу матрицы, а f — к материалу включений.

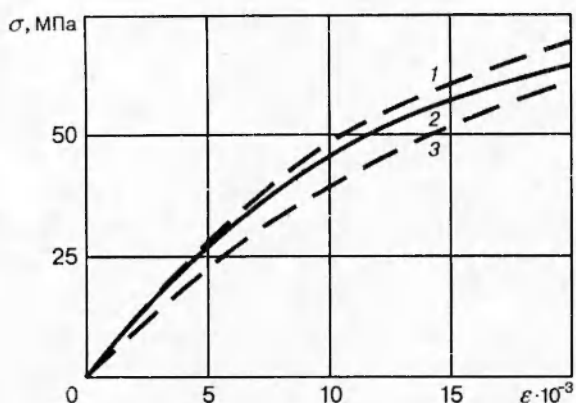


Рис. 1

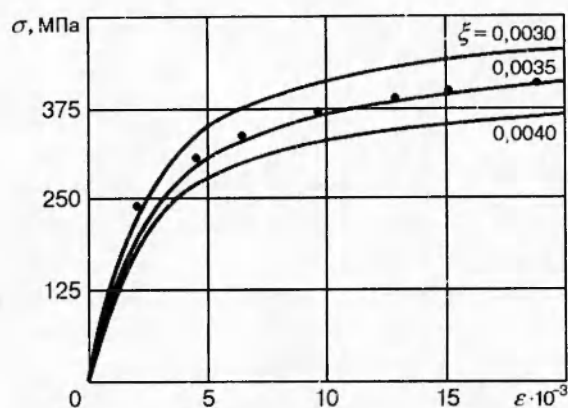


Рис. 2

Из соотношений (7) следует, что эффективный тензор модулей пластичности E_{ijkl}^* в общем случае зависит от модулей пластического сдвига и объемных модулей материалов матрицы и включений, концентраций волокон, а также от формы эллипсоидальных включений, которая характеризуется отношением полуосей эллипсоидов a_1, a_2, a_3 :

$$E_{ijkl}^* = E_{ijkl}^*(\mu_{m,f}(e), K_{m,f}, c_f, \xi_1, \xi_2).$$

Поскольку относительные размеры частиц или волокон наполнителя имеют, как правило, существенный разброс (до 50%), который при конструировании композита классифицировать по ориентациям практически невозможно, то для получения уточненных расчетов по модели упругопластического деформирования композиционного материала целесообразно оценить эффективные значения параметров $\xi_{1,2} = a_{1,2}/a_3$, привлекая для этих целей дополнительную информацию об упругих свойствах композита.

Составим целевую функцию относительно параметров ξ_1, ξ_2 :

$$W(\xi_1, \xi_2) = \overline{\sum_{i,j,k,l} (E_{ijkl}^* - E_{ijkl}^{\text{exp}})^2}. \quad (8)$$

Здесь E_{ijkl}^{exp} — экспериментальные значения эффективного тензора модулей упругости.

Минимизация целевой функции W дает систему уравнений для определения параметров ξ_1, ξ_2 , которые затем можно использовать в соотношениях (7) при расчетах упругопластических свойств.

В качестве иллюстрации предложенного способа индивидуального прогнозирования рассматривается случай, когда в композиционном материале эллипсоидальные включения ориентированы равновероятно ($c_1 = c_2 = \dots = c_n$). В этом случае соотношения (7) принимают вид

$$\langle s_{ij} \rangle = 2\mu^*(e_{m,f})\langle e_{ij} \rangle, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = 3K^*(e_{m,f})\langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (9)$$

где $\mu^* = \mu_m + [\mu]c_f\alpha/(c_m + c_f\alpha)$; $K^* = K_m + [K]c_f\gamma/(c_m + c_f\gamma)$; $\gamma = \alpha - 3\beta$; $\alpha = (1/15)(3Q_{ppqq} - Q_{ppqq})$, $\beta = (1/15)(Q_{ppqq} - 2Q_{ppqq})$ — инварианты тензора Q_{ijkl} .

Уравнения (9) применялись для расчета упругопластических свойств образцов композита, изготовленных из спеченного алюминиевого порошка (САП) — алюминиевой матрицы с хаотически распределенными в ней частицами окиси алюминия Al_2O_3 (14%), образующимися при спекании порошка алюминия. Эти частицы представляют собой пластинки толщиной $h = 0,055$ мкм с линейным размером в плане $0 \leq L \leq 16$ мкм [7]. Частицы окислов аппроксимируются эллипсоидами вращения (сплюснутыми сфероидами), отношение

полуосей которых $\xi = hL^{-1}$. Компоненты тензора Эшелби в этом случае выражаются через элементарные функции, и процедура вычисления инвариантов α , γ легко реализуется на ЭВМ [8].

Диаграмма растяжения рассматриваемого композиционного материала строится по формуле

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{9K^* \mu^*}{3K^* + \mu^*} \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (10)$$

Участок диаграммы растяжения алюминиевой матрицы аппроксимируется экспоненциальной зависимостью [4], для которой функция $\mu_m(e)$ имеет вид

$$\mu_m(e) = \frac{k_m}{2e} \left(1 - \exp \left(- \frac{2G_m e}{k_m} \right) \right). \quad (11)$$

Здесь G_m — модуль сдвига; k_m — предельное напряжение сдвига на данном участке (предел текучести). Материал включений (высокопрочных и высокомодульных частиц окиси алюминия) считается идеально упругим во время всего процесса деформирования: $\mu_f = \text{const}$.

Расчетные значения величин следующие: $E_m = 71$ МПа, $E_f = 2500$ ГПа, $\nu_m = 0,34$, $\nu_f = 0,2$, $k_m = 25$ МПа, $c_f = 0,14$. Экспериментальное значение эффективного модуля Юнга $E_{\text{exp}} = 1750$ ГПа. Вычисленное значение параметра $\xi = 0,0035$. Уравнения (9)–(11) решались численно на ЭВМ методом последовательных приближений.

На рис. 2 сравниваются теоретические диаграммы растяжения САП, рассчитанные по формулам (9)–(11), с экспериментальными результатами [9] (линии соответствуют расчетам по формулам (9)–(11), точки — экспериментальным данным).

Таким образом, учет дополнительной информации об упругих свойствах композита позволяет достаточно точно оценивать его последующее упругопластическое поведение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сараев Л. А. Границы эффективных пределов текучести многокомпонентных композиционных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 125–129.
2. Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. М.: Наука, 1984.
3. Дудукаленко В. В., Лысач Н. Н., Мешков С. И. Об измерении многоточечных моментов композитных структур // ПМТФ. 1977. № 6. С. 145–149.
4. Сараев Л. А. Упругопластические свойства многокомпонентных композиционных материалов // ПМТФ. 1988. № 4. С. 124–130.
5. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982.
6. Сараев Л. А., Макарова И. С. К теории малых упругопластических деформаций хаотически армированных композиционных материалов // ПМТФ. 1991. № 5. С. 120–124.
7. Основы материаловедения / Под ред. И. И. Сидорина. М.: Машиностроение, 1976.
8. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Клявин О. В. Физика пластичности кристаллов при гелиевых температурах. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 29/1 1996 г.