ЛИТЕРАТУРА

1. **Силин В. П.** Поглощение излучения турбулентной плазмой // УФН.— 1985.— Т. 145, № 2.
2. **Райзер Ю. П.** Лазерная искра и распространение разрядов.— М.: Наука, 1974.
3. **Кадомцев Б. Б.** Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1988.
4. **Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.** Физика плазмы для физиков.— М.: Атомиздат, 1979.
5. **Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.** Введение в нелинейную физику.— М.: Наука, 1988.
6. **Заславский Г. М.** Стохастичность динамических систем.— М.: Наука, 1984.
7. **Данилычев В. А., Зворыкин В. Д.** Взаимодействие излучения CO_2-лазера с мишенью в газах // Тр. ФИАН.— 1983.— Т. 142.

г. Барнаул *Поступила 2/IV 1991 г., в окончательном варианте — 18/XI 1991 г.*

УДК 532.516

В. А. Кондратьев

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА В ОКРЕСТНОСТИ КРАЕВОГО УГЛА

В [1] при изучении задачи с односторонними ограничениями для уравнения Навье — Стокса исследуется функция $\psi(r, \varphi)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\psi = 0, \; r < \varepsilon, \; -\pi < \varphi < 0 \tag{1}$$

($\varepsilon > 0$ — постоянная) и краевым условиям

$$\psi = 0, \; \Delta\psi = 0, \; \varphi = 0, \; 0 < r < \varepsilon,$$
$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = r, \quad \varphi = -\pi, \quad 0 < r < \varepsilon.$$

Здесь (r, φ) — полярная система координат на плоскости; Δ — оператор Лапласа. Дополнительно предполагается принадлежность функции пространству Соболева W_2^2 в полукруге $S_\varepsilon = \{(r, \varphi) : r < \varepsilon, -\pi < \varphi < 0\}$. Авторы, используя методику, развитую в [2, 3], приводят формулу

$$\psi = -r\sin\varphi + Ar^{3/2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{3\varphi}{2}\right) + O(r^2\ln r) \tag{2}$$

при $r \to 0$, $-\pi < \varphi < 0$, $A = \mathrm{const}$, которая зависит от ψ. Асимптотические представления для $\partial\psi/\partial r$, $\partial\psi/\partial\varphi$, $\Delta\psi$ получаются из (2) путем формального дифференцирования. На самом деле формула (2) допускает уточнение: именно для ψ справедливо разложение в асимптотический ряд [2, 4]

$$\psi = -r\sin\varphi t\sum_{j=3}^{\infty} A_j r^{j/2}\Phi_j(\varphi), \quad A_j = \mathrm{const}, \tag{3}$$

где Φ_j — нормированные в $L_2[-\pi, 0]$ собственные функции задачи

$$\frac{1}{4}j^2\left(\frac{j}{2}-2\right)^2\Phi + \frac{j^2}{2}\Phi''' + \Phi^{IV} = 0, \tag{4}$$
$$-\pi < \varphi < 0, \; \Phi(-\pi) = \Phi(0) = 0, \; \Phi'(-\pi) = \Phi''(0) = 0.$$

Формула (3) является асимптотической в том смысле, что, каково бы ни было N, справедливы оценки

$$\left|D^\alpha(\psi) + r\sin\varphi - \sum_{j=3}^{N} A_j r^{j/2}\Phi_j(\varphi)\right| = O(r^{(N+1)/2-|\alpha|})$$

при $r \to 0$ для всех α. Здесь $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}$; $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Заметим, что уравнение (4) с постоянными коэффициентами легко решается и собственные функции задачи (4) могут быть выписаны явно; (3) — частный случай более общей формулы, дающей асимптотическое представление решения краевой задачи для произвольного эллиптического уравнения в окрестности угловой точки границы области. Из (3) следует, что в формуле (2) остаточный член может быть заменен на $O(r^2)$, а его вторые производные ограничены. В работе [4], которая использовалась в [1] при получении формулы (2), изучалось не уравнение (1), а нелинейное уравнение Навье — Стокса

(5) $$\nu\Delta\Delta u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \Delta u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \Delta u}{\partial x} = 0, \quad r < \varepsilon, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

с краевыми условиями

(6) $$u = \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = 2\pi, \quad 0 < r < \varepsilon.$$

Предполагалось, что $u \in W_2^2(S_\varepsilon)$, $S_\varepsilon = \{x : 0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < r < \varepsilon\}$. Обобщенным решением задачи (5), (6) называем функцию $u(x) \in W_2^2(S_\varepsilon)$, удовлетворяющую краевым условиям (6) и такую, что

$$\nu \int\limits_{S_\varepsilon} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}\right] dx_1 dx_2 +$$
$$+ \int\limits_{S_\varepsilon} \Delta u \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 = 0$$

при любой $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(S_\varepsilon)$.

В действительности представление (2) с остаточным членом порядка $O(r^2)$ можно получить и для решения задачи (5), (6). При этом будут использоваться результаты по оценкам $L_p (1 < p < \infty)$ решений краевых задач [5], которые не были известны во время появления работы [3]. В [5] доказано, что если $u(x)$ — обобщенное решение уравнения

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

в S_ε, удовлетворяющее краевым условиям (6),

$$u(x) \in W_q^2(S_\varepsilon), \quad q \geqslant 2, \quad \int\limits_{S_\varepsilon} |f_i|^p dx_1 dx_2 < \infty, \quad p > 1, \quad i = 1, 2,$$

то

(7) $$u(x) = Ar^{3/2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{3\varphi}{2}\right) + u_0(x),$$

где

$$\|u_0\|^2_{W_p^3(S_{\varepsilon/2})} \leqslant C\left[\sum_{i=1}^{2} \|f_i\|^2_{L_p(S_\varepsilon)} + \|u\|^2_{L_2(S_\varepsilon)}\right], \quad 1 < p < 2,$$

и

(8) $$u(x) = Ar^{3/2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{3\varphi}{2}\right) + Br^2\sin^2\varphi + u_0(x).$$

Здесь

$$\|u_0(x)\|_{W_p^3(S_{\varepsilon/2})} \leqslant C\left[\|u\|_{L_2(S_\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{L_p(S_\varepsilon)}\right].$$

Кроме того,

$$|A| \leqslant C\left[\|u\|_{L_2(S_\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{L_p(S_\varepsilon)}\right] \text{ при } 1 < p < 2,$$

$$|A|+|B|\leqslant C\left[\|u\|_{L_2(S_\varepsilon)}+\sum_{i=1}^{2}\|f_i\|_{L_p(S_\varepsilon)}\right] \text{ при } 2<p<3.$$

Этот результат применяется для изучения задачи (5), (6).

Теорема. *Если* $u(x)\in W_2^2(S_\varepsilon)$ — *решение задачи* (5), (6), *то* $u(x)$ *имеет вид* (8), *где*

$$\sum_{0\leqslant k_1+k_2=k\leqslant 2}\left|\frac{\partial^k u_0(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right|\leqslant C\|u\|_{W_2^2(S_\varepsilon)}, \tag{9}$$

$x\in S_{\varepsilon/4}$, $C=\text{const}$ *от* u *не зависит.*

Доказательство. Уравнение (5) можно записать в виде

$$\nu\Delta\Delta u=-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta u\right)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Delta u\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}. \tag{10}$$

Здесь $f_1\in L_s(\Omega_\varepsilon)$, $f_2\in L_s(\Omega_\varepsilon)$ при любом $s<2$, так как $\Delta u\in L_2(\Omega_\varepsilon)$, $\operatorname{grad} u\in L_p(\Omega_\varepsilon)$ при любом $p<\infty$. Таким образом, для $u(x)$ справедлива формула (7), где $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k_1+k_2=3}\left\|\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}}\right\|_{L_p(S_{\varepsilon/2})}\leqslant C_p\|u\|_{W_2^2(S_\varepsilon)}\quad \forall p<2. \tag{11}$$

Из (11) и теоремы вложения Соболева следует, что $u_0\in W_q^2(S_{\varepsilon/2})$, $u_0\in C^1(S_{\varepsilon/2})$ при любом q. Представляя u в виде (7) в уравнении (10), для u_0 получим

$$\nu\Delta\Delta u_0=\frac{\partial}{\partial x_1}F_1+\frac{\partial}{\partial x_2}F_2,$$

где $F_1\in L_p(S_{\varepsilon/2})$, $F_2\in L_p(S_{\varepsilon/2})$ при любом $p<4$ и

$$\|F_1\|_{L_p(S_{\varepsilon/2})}+\|F_2\|_{L_p(S_{\varepsilon/2})}\leqslant C\|u\|_{W_2^2(S_\varepsilon)}.$$

Используя для u_0 формулу (8), имеем

$$u_0=A_1r^{3/2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{3\varphi}{2}\right)+B_1r^2\sin^2\varphi+v_0(x). \tag{12}$$

Здесь $v_0(x)\in W_p^3(S_{\varepsilon/4})$ при любом $p<4$. Из теоремы вложения Соболева теперь вытекает, что $v_0\in C^2(S_{\varepsilon/4})$. Подставляя u_0 в виде (12) в формулу (7), находим нужную формулу (9), где $v_0\in C^2(S_{\varepsilon/4})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Байокки К., Пухначев В. В.** Задачи с односторонними ограничениями для уравнений Навье — Стокса и проблема динамического краевого угла // ПМТФ.— 1990.— № 2.
2. **Кондратьев В. А.** Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. о-ва.— 1967.— Т. 16.
3. **Кондратьев В. А.** Асимптотика решений уравнений Навье — Стокса в окрестности угловой точки границы // ПММ.— 1967.— Т. 31, вып. 1.
4. **Кондратьев В. А., Олейник О. А.** Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // УМН.— 1983.— Т. 38, № 2.
5. **Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.** Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr.— 1978.— V. 81.— P. 25.

г. Москва *Поступила 22/XI 1991 г.*