$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65H10, 65J15

Анализ полулокальной сходимости в банаховых пространствах при ослабленном условии и вычислительная эффективность

Дж.П. Джаисвал[1,2,3]

[1]Department of Mathematics, Maulana Azad National Institute of Technology, Bhopal, M.P., 462051, India

[2]Faculty of Science, Barkatullah University, Bhopal, M.P., 462026, India

[3]Regional Institute of Education, Bhopal, M.P., 462013, India
E-mail: asstprofjpmanit@gmail.com

Джаисвал Дж.П. Анализ полулокальной сходимости в банаховых пространствах при ослабленном условии и вычислительная эффективность // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 2. — С. 157–168.

В данной статье исследуется полулокальная сходимость метода пятого порядка для решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах при ослабленных условиях. Доказывается теорема существования и единственности с получением оценок ошибки. Также изучается вычислительное превосходство рассматриваемой схемы над методами такого же порядка, что подтверждает эффективность данной схемы с вычислительной точки зрения. И, наконец, теоретические результаты применяются в нелинейном интегральном уравнении.

DOI: 10.15372/SJNM20170204

Ключевые слова: *нелинейное уравнение, банахово пространство, слабое условие, полулокальная сходимость, граница ошибки.*

Jaiswal J.P. Analysis of semilocal convergence in Banach spaces under relaxed condition and computational efficiency // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 2. — P. 157–168.

The present paper is concerned with the study of semilocal convergence of a fifth-order method for solving nonlinear equations in Banach spaces under mild conditions. An existence and uniqueness theorem is proved and followed by error estimates. The computational superiority of the considered scheme over the identical order methods is also examined, which shows the efficiency of the present scheme from a computational point of view. Lastly, an application of the theoretical development is made in a nonlinear integral equation.

Keywords: *nonlinear equation, Banach space, weak condition, semilocal convergence, error bound.*

1. Введение

Многочисленные вопросы, возникающие в различных областях науки и техники, часто требуют найти решение нелинейных уравнений в банаховых пространствах вида

$$F(x) = 0, \tag{1.1}$$

где $F : \Omega \subseteq X \to Y$ — нелинейный оператор на непустом открытом выпуклом подмножестве Ω банахова пространства X со значениями в банаховом пространстве Y. Самым известным методом для решения (1.1) является метод Ньютона [1], который сходится квадратично. Для получения лучшей эффективности в литературе имеется много методов высокого порядка, например третьего [2, 3], четвертого [4, 5] и их вариантов. Они были хорошо протестированы для решения нелинейных интегральных уравнений. Имеются даже некоторые другие схемы пятого порядка, однако мы рассмотрим метод, известный по работам Кордеро с соавторами [6, 7]. Причина этого будет указана ниже. Метод формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \Gamma_k F(x_k), \\ z_k &= y_k - 5\,\Gamma_k F(y_k), \\ x_{k+1} &= z_k - \frac{1}{5}\Gamma_k\big[-16F(y_k) + F(z_k)\big], \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\Gamma_k = \big[F'(x_k)\big]^{-1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для обеспечения сходимости вышеупомянутого метода авторы этой статьи приводят следующие допустимые условия в [6]:

(R1) $\|\Gamma_0\| \le \beta$,

(R2) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \le \eta$,

(R3) $\|F'(x) - F'(y)\| \le k^*\|x - y\|, \quad x, y \in \Omega,\ k^* \ge 0.$

При условиях приведенной выше гипотезы они продемонстрировали полулокальную сходимость и согласовали границы ошибки. Ситуация, когда третья гипотеза заменяется на более слабое предположение

(R3*) $\|F'(x) - F'(y)\| \le k^*\|x - y\|^q, \quad x, y \in \Omega,\ k^* \ge 0,\ q_i \in [0, 1],$

рассматривалась Сингх с соавторами [8]. Однако решение некоторых уравнений нельзя исследовать путем рассмотрения условий (R1)–(R3) и (R1), (R2), (R3*). Таковым является нелинейное интегральное уравнение Хаммерштейна смешанного типа [9], которое задается следующим образом:

$$x(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b G_i(s,t) H_i\big(x(t)\big)\,dt = u(s), \quad s \in [a, b], \tag{1.3}$$

где x — решение, которое необходимо найти, u, G_i и H_i — заданные функции ($i = 1, 2, \ldots, m$), $-\infty < a < b < +\infty$. Чтобы найти решение (1.3), нам нужно решить следующее уравнение:

$$\big[F(x)\big](s) = x(s) + \sum_{i=1}^{m} \int_a^b G_i(s,t) H_i\big(x(t)\big)\,dt - u(s), \quad s \in [a, b]. \tag{1.4}$$

При условии, что $H_i'\big(x(t)\big)$ является (L_i, q_i)-непрерывным по Гельдеру при $i = 1, 2, \ldots, m$, рассматривая максимальную норму, имеем

$$\big\|F'(x) - F'(y)\big\| \le \sum_{i=1}^{m} L_i \|x - y\|^{q_i}, \quad L_i \ge 0,\ q_i \in [0, 1],\ x, y \in \Omega. \tag{1.5}$$

Это показывает, что для $q_i \in (0, 1)$ F' не является непрерывным ни по Липшицу, ни по Гельдеру в Ω. Поскольку нелинейное интегральное уравнение Хаммерштейна смешанного типа имеет большое значение, оно изучалось во многих статьях (см., например, [10–12]).

Для разрешения этой ситуации мы можем рассмотреть условие, которое является более обобщенным, чем условие непрерывности по Липшицу и Гельдеру для F'. Оно задается следующим образом:

$$\big\|F'(x) - F'(y)\big\| \le w(\|x-y\|), \quad x, y \in \Omega, \tag{1.6}$$

где $w(z) = \sum_{i=1}^{m} L_i z^{p_i}$. Так же потребуем, чтобы $w(z)$ было неубывающей вещественной функцией для $z > 0$ такой, что $w(0) \ge 0$ (см. [13]).

В данной статье мы обсуждаем результаты полулокальной сходимости, например сходимость и оценки ошибки при более слабых предположениях, чем рассмотренные в вышеупомянутых статьях. Применимость этого метода с вычислительной точки зрения может быть оправдана путем сравнения вычислительной эффективности решения нелинейной системы обобщенного вида с существующими методами такого же порядка. И, наконец, для проверки теоретических результатов будет представлен численный пример.

2. Предварительная лемма

Пусть $x_0 \in \Omega$ и $F : \Omega \subseteq X \to Y$ — нелинейный оператор, дифференцируемый по Фреше с третьим порядком, где Ω — открытое множество и X, Y — банаховы пространства. Предположим, что

(WC1) $\|\Gamma_0\| \le \beta$,

(WC2) $\|\Gamma_0 F(x_0)\| \le \eta$,

(WC3) $\|F'(x) - F'(y)\| \le w(\|x-y\|)$,

где $w : R_+ \to R_+$ — непрерывная неубывающая функция, удовлетворяющая условию $w(tz) \le \phi(t)w(z)$, $t \in [0,1]$, $z \in [0, +\infty)$, $\phi : [0,1] \to R_+$ — также непрерывная и неубывающая.

Сначала докажем следующую лемму, которая будет использоваться для доказательства основного результата.

Лемма 1. *Если x_k, y_k, z_k, $x_{k+1} \in \Omega$, то справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && \|z_k - y_k\| = \big[g_r(\|y_k - x_k\|) - 1\big]\|y_k - x_k\|,\\
&\text{(II)} && \|z_k - x_k\| = g_r\big(\|y_k - x_k\|\big)\|y_k - x_k\|,\\
&\text{(III)} && \|x_{k+1} - z_k\| = h_r\big(\|y_k - x_k\|, \|z_k - y_k\|\big)\|z_k - y_k\| +\\
& && \qquad \frac{4}{5}\big[g_r(\|y_k - x_k\|) - 1\big]\|y_k - x_k\|,\\
&\text{(IV)} && \|y_{k+1} - x_{k+1}\| = 4h_r\big(\|y_k - x_k\|, \|z_k - y_k\|\big)\|z_k - y_k\| +\\
& && \qquad 5h_r(\|z_k - x_k\|, \|x_{k+1} - z_k\|)\|x_{k+1} - z_k\|,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $g_r(u) = 1 + 5\widetilde{\beta} H w(u)$, $H = \int_0^1 \phi(t)\, dt$, $h_r(u,v) = \frac{1}{5}\widetilde{\beta}[w(u) + Hw(v)]$.

Доказательство.

(I) Из разложения Тейлора $F(y_k)$ и с использованием (WC1)–(WC3) мы получим

$$\|F(y_k)\| \le Hw\big(\|y_k - x_k\|\big)\|y_k - x_k\|. \tag{2.2}$$

До доказательства первого соотношения найдем границы для Γ_k. Для этого предположим, что существует $r \in R_+$ такое, что $B(x_0, r) \in \Omega$ и $\beta w(r) < 1$. Тогда для каждого $x_k \in B(x_0, r)$:

$$\|I - \Gamma_0 F'(x_k)\| \le \Gamma_0 \|F'(x_0) - F'(x_k)\| \le \beta w(r) < 1, \tag{2.3}$$

что показывает, согласно леммы Банаха [14], что Γ_k существует и

$$\|\Gamma_n\| \le \frac{\beta}{1-\beta w(r)} := \widetilde{\beta}_R. \tag{2.4}$$

Ясно, что $\widetilde{\beta}_R > \beta$. Используя второй подшаг схемы (1.1), а затем соотношения (2.2) и (2.4), мы можем получить (I).

(II) Это соотношение следует из неравенства треугольника и предыдущего результата.

(III) Разложив $F(y_k)$ и $F(z_k)$ в ряды Тейлора и используя эти три предположения, мы получим

$$\begin{aligned} \|-16F(y_k)+F(z_k)\| \le{} & 20Hw\big(\|y_k-x_k\|\big)\|y_k-x_k\| + \\ & \big[w(\|y_k-x_k\|)+Hw\big(\|z_k-y_k\|\big)\big]\|z_k-y_k\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В силу приведенного выше соотношения и уравнения (2.4) мы находим требуемое неравенство.

(IV) Используя третий подшаг рассматриваемой схемы и разложение Тейлора для $F(x_{k+1})$, мы можем получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \|F(x_{k+1})\| \le{} & \frac{4}{5}\big[w(\|y_k-x_k\|)+Hw(\|z_k-y_k\|)\big]\|z_k-y_k\| + \\ & \big[w(\|z_k-x_k\|)+Hw(\|x_{k+1}-z_k\|)\big]\|x_{k+1}-z_k\|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь из первого шага схемы (1.1):

$$\|y_{k+1}-x_{k+1}\| \le \Gamma_{k+1}\|F(x_{k+1})\|, \tag{2.7}$$

и, наконец, используя необходимые неравенства, полученные выше, мы получим искомые соотношения. □

Ясно, что g_r — неубывающая функция, поскольку w является неубывающей согласно нашему предположению. Кроме того, h_r — неубывающая функция в обоих аргументах.

3. Рекуррентные соотношения

В данном пункте, применив предыдущую лемму, мы рассмотрим рекуррентные соотношения для последовательностей $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ и $\{z_k\}$, определенные из соотношения (1.1).

Для $k=0$ условие (WC1) устанавливает, что

$$\|y_0-x_0\| \le \eta. \tag{3.1}$$

Кроме того, лемма (1) дает нам

$$\|z_0-y_0\| \le \big[g_r(\eta)-1\big]\eta, \tag{3.2}$$

$$\|z_0-x_0\| \le g_r(\eta)\eta, \tag{3.3}$$

$$\|x_1-z_0\| \le h_r\big(\eta,\big[g_r(\eta)-1\big]\eta\big)\big[g_r(\eta)-1\big]\eta + \frac{4}{5}\big[g_r(\eta)-1\big]\eta. \tag{3.4}$$

Таким образом,

$$\|x_1 - x_0\| \leq h_r\big(\eta, \big[g_r(\eta) - 1\big]\eta\big)\big[g_r(\eta) - 1\big]\eta + \frac{1}{5}\big[9g_r(\eta) - 4\big]\eta. \tag{3.5}$$

Теперь определим следующие скалярные величины:

$$\begin{aligned}
&a_0 = \eta,\\
&b_0 = g_r(a_0)a_0,\\
&c_0 = [g_r(a_0) - 1]a_0,\\
&d_0 = h_r(a_0, c_0)c_0 + \frac{4}{5}\big[g_r(a_0) - 1\big]a_0,\\
&\Delta = h_r(a_0, c_0)[g_r(a_0) - 1] + \frac{1}{5}\big[9g_r(a_0) - 4\big],\\
&\Theta = 4h_r(a_0, c_0)[g_r(a_0) - 1] + 5h_r(b_0, d_0)\bigg(h_r(a_0, c_0)[g_r(a_0) - 1] + \frac{4}{5}\big[g_r(a_0) - 1\big]\bigg).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Заметим, что $\Delta > g_r(a_0) > 1$.

Для $k = 1$ из четвертой части леммы (1) имеем

$$\|y_1 - x_1\| \leq \Theta a_0 := a_1. \tag{3.7}$$

Это означает $a_1 < a_0$ при условии, что $\Theta < 1$, и используя тот факт, что $\Delta > 1$, мы можем записать следующее:

$$\|y_1 - x_0\| \leq \Theta a_0 + \Delta a_0 \leq (1 + \Theta)\Delta a_0. \tag{3.8}$$

Соотношение (II) леммы 1 показывает, что

$$\|z_1 - x_1\| \leq g_r(a_1)a_1 := b_1. \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$\|z_1 - x_0\| \leq \big[g_r(a_1)\Theta + \Delta\big]a_0 \leq (1 + \Theta)\Delta a_0. \tag{3.10}$$

С другой стороны, из соотношения (I) леммы 1 мы имеем

$$\|z_1 - y_1\| \leq [g_r(a_1) - 1]a_1 := c_1, \tag{3.11}$$

$$\|x_2 - z_1\| \leq h_r(a_1, c_1)c_1 + \frac{4}{5}\big[g_r(a_1) - 1\big]a_1 := d_1. \tag{3.12}$$

На основании неравенства треугольника и приведенного выше соотношения мы можем найти

$$\|x_2 - x_1\| \leq h_r(a_1, c_1)\big[g_r(a_1) - 1\big] + \frac{1}{5}\big[9g_r(a_1) - 4\big]a_1 < \Delta\Theta a_0, \tag{3.13}$$

и, наконец, можно записать

$$\|x_2 - x_0\| \leq (1 + \Theta)\Delta a_0. \tag{3.14}$$

На основании ранее полученных результатов мы можем определить следующие последовательности:

$$\begin{aligned} a_k &= \Theta a_{k-1},\\ b_k &= g_r(a_k)a_k,\\ c_k &= \big[g_r(a_k)-1\big]a_k,\\ d_k &= h_r(a_k,c_k)c_k + \frac{4}{5}\big[g_r(a_k)-1\big]a_k. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ясно, что последовательности $\{a_k\}, \{b_k\}$, $\{c_k\}$ и $\{d_k\}$ являются убывающими при условии, что $\Theta < 1$. Теперь рассмотрим следующую лемму.

Лемма 2. *Предположим, что существует положительное вещественное число r и $B(x_0, r) \subset \Omega$ такое, что выполняются следующие условия:*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && 1-\beta w(r) > 0,\\ &\text{(ii)} && 1-\Theta > 0,\\ &\text{(iii)} && r - \frac{\Delta}{1-\Theta}\,\eta > 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Тогда последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{z_k\} \in B(x_0, r)\ \forall\ k \ge 0$ и (3.15) согласуются со следующими ограничениями:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}_k) && \|y_k - x_k\| \le a_k, \quad \|y_k - x_0\| < (1+\Theta+\cdots+\Theta^k)\Delta a_0,\\ &(\mathrm{II}_k) && \|z_k - x_k\| \le b_k, \quad \|z_k - x_0\| < \Delta a_0(1+\Theta+\cdots+\Theta^k),\\ &(\mathrm{III}_k) && \|z_k - y_k\| \le c_k,\\ &(\mathrm{IV}_k) && \|x_{k+1} - z_k\| \le d_k,\\ &(\mathrm{V}_k) && \|x_{k+1} - x_k\| \le \Delta\Theta^k a_0, \quad \|x_{k+1} - x_0\| < \Delta a_0(1+\Theta+\cdots+\Theta^k). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Доказательство. Поскольку $x_0 \in \Omega$, неравенства (I_k)–(V_k) для $k = 1$ были проверены ранее. Докажем эти соотношения с использованием понятия математической индукции. Для этого предположим, что (I_s)–(V_s) верно для $s = k$. Тогда для $k+1$, согласно лемме 1 и гипотезе индукции, имеем

$$\begin{aligned} \|y_{k+1} - x_{k+1}\| &\le 4h_r(a_k, c_k)\big[g_r(a_k)-1\big]a_k +\\ &\qquad 5h_r(b_k, d_k)\left(h_r(a_k,c_k)\big[g_r(a_k)-1\big] + \frac{4}{5}\big[g_r(a_k)-1\big]\right)a_k\\ &\le \Theta a_k = a_{k+1}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Кроме того, согласно неравенству треугольника, и используя тот факт, что $\Delta > 1$ и предположение $\Theta < 1$, можем найти, что

$$\|y_{k+1} - x_0\| < \big(1+\Theta+\cdots+\Theta^k+\Theta^{k+1}\big)\Delta a_0 < \frac{\Delta}{1-\Theta}a_0 < r, \tag{3.19}$$

откуда следует, что $y_{k+1} \in B(x_0, r)$. Из соотношения (I) леммы 1 следует, что (III_s) верно для $s = k+1$. Аналогичным образом, как и в первой части, и используя тот факт, что $1 < g_r(a_0) < \Delta$, мы находим, что неравенство (II_s) верно для $s = k+1$ и, таким образом, $z_{k+1} \in B(x_0, r)$. Снова из соотношения (III) леммы 1 имеем

$$\|x_{k+2} - z_{k+1}\| \le h_r(a_{k+1}, c_{k+1})c_{k+1} + \frac{4}{5}\big[g_r(a_{k+1})-1\big]a_{k+1} = d_{k+1}. \tag{3.20}$$

В силу приведенного выше соотношения и используя неравенство треугольника, получим

$$\|x_{k+2}-x_{k+1}\| \le h_r(a_{k+1},c_{k+1})\big[g_r(a_{k+1})-1\big]a_{k+1}+\frac{1}{5}\big[9g_r(a_{k+1})-4\big]a_{k+1} \le \Delta\Theta^{k+1}a_0. \tag{3.21}$$

Наконец, имеем следующее:

$$\|x_{k+2}-x_0\| < \big(1+\Theta+\cdots+\Theta^k+\Theta^{k+1}\big)\Delta a_0 < \frac{\Delta}{1-\Theta}a_0 < r. \tag{3.22}$$

Таким образом, $x_{k+2} \in B(x_0, r)$, и лемма доказана. □

4. Полулокальная сходимость

В данном пункте докажем основной результат.

Теорема 1. *Пусть* X *и* Y *— два банаховых пространства, а* $F\colon \Omega \subseteq X \to Y$ *— нелинейный оператор, непрерывно дифференцируемый по Фреше с третьим порядком на непустом открытом выпуклом подмножестве* Ω*. Предположим, что существует* $\Gamma_0 = [F'(x_0)]^{-1}$ *для* $x_0 \in \Omega$*, условия* (WC1)–(WC3) *удовлетворяются и существует* $r \in R_+$ *такое, что соотношения* (5.5) *выполняются. Если* $B(x_0, r) \subset \Omega$*, то последовательность, определяемая* (1.1)*, сходится к решению* x^* *для* $F(x) = 0$*. Более того, предположим, что существует положительный корень* ρ *уравнения*

$$2\beta w(r+\rho) = \int_{1/2}^{1} \phi(t)\,dt = 1, \tag{4.1}$$

тогда решение x^* *для* $F(x) = 0$ *является единственным в* $\Omega_0 = B(x_0, \rho) \cap \Omega$*.*

Доказательство. Согласно лемме 2, итерационный процесс вполне определен. Теперь докажем, что $\{x_k\}$ — последовательность Коши. Поскольку

$$\|x_{k+m}-x_k\| \le \sum_{i=k}^{k+m-1}\|x_{i+1}-x_i\| \le \sum_{i=k}^{k+m-1}\Delta\Theta^i a_0 \le \Delta a_0\frac{\Theta^k-\Theta^{k+m}}{1-\Theta}, \tag{4.2}$$

согласно предположению $\Theta < 1$, отсюда следует, что $\{x_k\}$ — последовательность Коши. Так что существует x^* такое, что $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. Пусть $m \to \infty$. Тогда мы имеем априорную оценку ошибки

$$\|x_k - x^*\| \le \frac{\Delta}{1-\Theta}a_0 \le r. \tag{4.3}$$

Предположив, что $k = 0$ и $m \to \infty$, имеем

$$\|x^* - x_0\| \le r. \tag{4.4}$$

Это показывает, что $x^* \in \overline{B(x_0, r)}$. Докажем, что x^* — решение $F(x) = 0$. Поскольку

$$\|F'(x_k)\| \le \|F'(x_k) - F'(x_0)\| + \|F'(x_0)\| \le w(r) + \|F'(x_0)\|, \tag{4.5}$$

то это подтверждает, что $F(x_k)$ ограничено. Так как $\|\Gamma_k F(x_k)\| \le \|y_k - x_k\| \le a_k = \Theta^k a_0$ и $\|F(x_k)\| \le \|F'(x_k)\|\|\Gamma_k F(x_k)\|$, то ввиду непрерывности F имеем $F(x^*) = 0$. Предположим, если возможно, что x^{**} — еще один нуль $F(x)$ в $B(x_0, \rho) \cap \Omega$. Используя разложение Тейлора, имеем

$$0 = F(x^{**}) - F(x^*) = \int_0^1 F'\big((1-t)x^* + tx^{**}\big)\,dt(x^{**} - x^*). \tag{4.6}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_0\|\Big\|\int_0^1 \big[F'((1-t)x^* + tx^{**}) - F'(x_0)\big]\,dt\Big\| \\
&\le \beta\int_0^1 w\big((1-t)\|x^* - x_0\| + t\|x^{**} - x_0\|\big)\,dt \\
&< \beta\int_0^{1/2} \phi(1-t)w(r+\rho)\,dt + \beta\int_{1/2}^1 \phi(t)w(r+\rho)\,dt \\
&= 2\beta\int_{1/2}^2 \phi(1-t)w(r+\rho)\,dt.
\end{aligned}$$

Согласно лемме Банаха, $\int_0^1 F'((1-t)x^* + tx^{**})\,dt$ обратим и, следовательно, $x^{**} = x^*$. □

5. Модифицированная вычислительная эффективность

В статье [6] Кордеро с соавторами обсуждают эффективность рассматриваемой схемы для нелинейных систем с точки зрения классического индекса эффективности, введенного Островским [15], и индекса вычислительной эффективности, предложенного Траубом [16]. Они показали, что эта схема более эффективна, чем схемы более высокого порядка. В данном пункте обсудим индекс вычислительной эффективности представленного метода с точки зрения модифицированной концепции вычислительной эффективности, предложенной Санчесом с соавторами в [17]. Затем мы сравним модифицированную вычислительную эффективность методов такого же порядка и покажем, что представленный метод является эффективным, что позволяет нам использовать эту схему в данном исследовании.

Вычислительные затраты для системы нелинейных уравнений для m переменных задаются следующим образом [17]:

$$C(\mu_0, \mu_1, m) = \mu_0 a0m + \mu_1 a1m^2 + P(m), \tag{5.1}$$

где $a0$ и $a1$ обозначают число скалярных функций F и F' соответственно, $P(m)$ — число произведений на одну итерацию, μ_0 и μ_1 — отношения произведений и вычислений, необходимых для выражения значения $C(\mu_0, \mu_1, m)$ в терминах произведений. Выражение для $P(m)$ задается следующим образом:

$$P(m) = \frac{m\big(2p1m^2 + \big(3p1(k1+1) + 6p2\big)m + 6p0 + p1(3k1-5) + 6p2(k1-1)\big)}{6}, \tag{5.2}$$

где $p0$, $p1$ и $p2$ обозначают число скалярных произведений, число полных операций линейной системы и число операций двух треугольных систем на одну итерацию соответственно, а $k1$ — эквивалентные произведения для одного деления.

Индекс эффективности [18] итерационного метода определяется путем $E = d^{1/C}$, где d — порядок сходимости, а C — вычислительные затраты на одну итерацию. Сравним эффективность представленного метода (1.1), обозначаемого M51, со схемами такого же порядка Шармы и Гупты [19] (M52) и схемой Чена с соавторами [20] (M53). Метод M52 задается путем

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{1}{2}\Gamma_k F(x_k),\\ z_k &= x_k - \left[F'(y_k)\right]^{-1} F(x_k), \\ x_{k+1} &= z_k - \left[2F'(y_k)^{-1} - \Gamma_k\right] F(z_k), \end{aligned} \tag{5.3}$$

а M53 определяется как

$$\begin{aligned} u_k &= x_k - \Gamma_k F(x_k),\\ y_k &= x_k + \frac{1}{2}(u_k - x_k),\\ z_k &= x_k - \left[F'(y_k)\right]^{-1} F(x_k),\\ x_{k+1} &= z_k - \left[3F'(y_k) - 2F'(x_k)\right]^{-1} F'(y_k)\Gamma_k F(z_k). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Пусть E5i — индексы эффективности методов M5i ($i = 1, 2, 3$), а C5i — вычислительные затраты. Тогда, учитывая приведенное выше, получим:

C51= $m\big(2m^2 + (6\mu_1 + 3k1 + 5)m + 18\mu_0 + 15k1 + 1\big)/6$ и E51= $5^{1/\mathrm{C51}}$,
C52= $m\big(4m^2 + (12\mu_1 + 6k1 + 8)m + 12\mu_0 + 18k1 - 10\big)/6$ и E52= $5^{1/\mathrm{C52}}$,
C53= $m\big(6m^2 + (12\mu_1 + 9k1 + 10)m + 12\mu_0 + 15k1 - 3\big)/6$ и E53= $5^{1/\mathrm{C53}}$.

На основании приведенных выше значений мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Для всех* $m \geq 2$, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 > 0$ *и* $k1 \geq 1$ *имеем:*

(i) $E51 > E52$,

(ii) $E51 > E53$. (5.5)

В противном случае сравнение эффективности зависит от m, μ_0, μ_1 *и* $k1$.

Теперь отобразим графики результатов теоремы 1 для конкретного множества $(\mu_0, \mu_1, k1) = (1, 1, 1)$ на рисунках. На рис. 1 и рис. 2 пунктирные линии обозначают метод M51, а сплошные линии — остальные схемы.

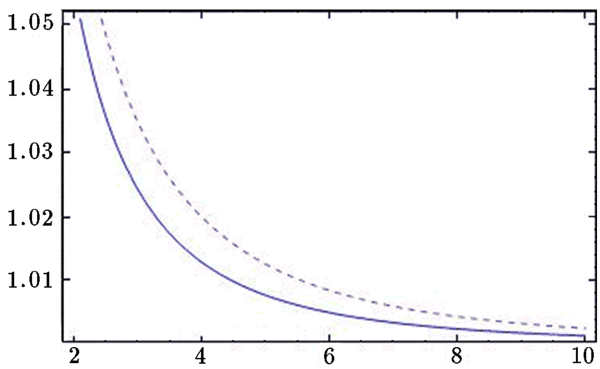

Рис. 1. Графики C51 и C52

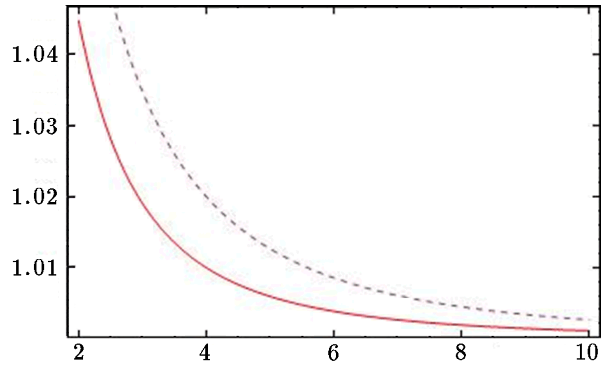

Рис. 2. Графики C51 и C53

6. Применение

В последнем пункте рассмотрим нелинейное интегральное уравнение Хаммерштейна смешанного типа, которое также рассматривается в [21] и задается следующим образом:

$$x(s) = 1 + \int_0^1 G(s,t)\left(x(t)^{7/5} + \frac{x(t)^2}{10}\right)dt. \tag{6.1}$$

Ядро $G(s,t)$ представляет собой функцию Грина в $[0,1]$ и задается следующим образом:

$$G(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, & t \le s, \\ s(1-t), & s \le t. \end{cases} \tag{6.2}$$

Решение (6.1) такое же, как и решение $F(x)=0$, где $F : \Omega \subset C[0,1] \to C[0,1]$ и

$$F(x)(s) = x(s) - 1 - \int_0^1 G(s,t)\left(x(t)^{7/5} + \frac{x(t)^2}{10}\right)dt. \tag{6.3}$$

В этом случае

$$F'(x)y(s) = y(s) - \int_0^1 G(s,t)\left(\frac{7}{5}x(t)^{2/5} + \frac{1}{5}x(t)\right)dt, \tag{6.4}$$

что дает

$$\|F'(x) - F'(y)\| = \frac{1}{40}\big(7\|x-y\|^{2/5} + \|x-y\|\big), \tag{6.5}$$

учитывая, что $\| \int_0^1 G(s,t)\| \le \frac{1}{8}$. Тогда $w(z) = \frac{1}{40}\big(7z^{2/5}+z\big)$. Начиная с $x_0 \in \Omega$, мы получим $r \in R_+$, так что можно использовать теорему 1 и получить самое низкое значение r такое, что существует решение x^* для (6.3) в $B(x_0,r)$. Если мы возьмем $x_0 = 1$, то сможем вычислить следующие стартовые значения:

$$\beta = 5/4, \qquad \eta = 11/64, \qquad \phi(t) = t^{2/5}, \qquad H = 5/7. \tag{6.6}$$

Теперь, в силу соотношений (3.6), мы найдем наименьшее значение r, одновременно удовлетворяющее всем трем условиям (5.5):

$$\begin{aligned}
\psi_1(r) &= 1 - \beta\frac{1}{40}\big(7r^{2/5} + r\big) > 0,\\
\psi_2(r) &= 1 - 4h_r(a_0, c_0)\big(g_r(a_0) - 1\big) - \\
&\qquad 5h_r(b_0, d_0)\left(h_r(a_0, c_0)\big(g_r(a_0) - 1\big) + \frac{4}{5}\big[g_r(a_0) - 1\big]\right) > 0,\\
\psi_3(r) &= r - \frac{\Delta}{\psi_2(r)}\, a_0 > 0.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

На рис. 3 минимальное положительное значение $r = 0.393027$. На основании нашего теоретического исследования мы можем заключить, что существует решение x^* для (6.3) в $B(1, 0.393027) \subset \Omega$. Для единственности решения мы находим значение ρ с помощью уравнения (4.1) и имеем $\rho = 14.8572$. Таким образом, решение является единственным в $B(1, 14.8572) \cap \Omega$.

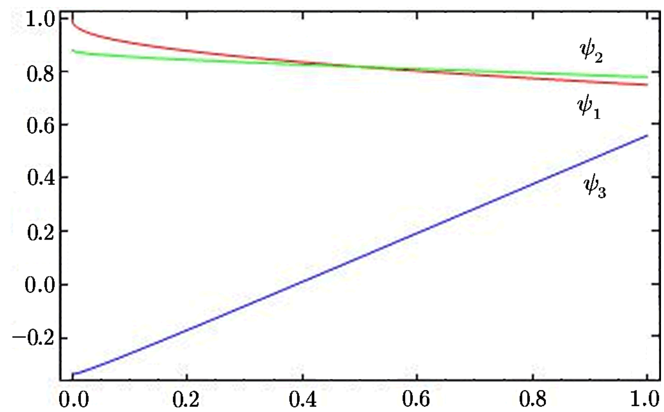

Рис. 3. Графики ψ_1, ψ_2 и ψ_3

Литература

1. **Ortega J.M., Rheinboldt W.C.** Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — New York: Academic Press, 1970.
2. **Amat S., Busquier S.** Third-order iterative methods under Kantorovich conditions // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 336, iss. 1. — P. 243–261.
3. **Parida P.K., Gupta D.K.** Recurrence relations for a Newton-like method in Banach spaces // J. Comput. Appl. Math. — 2007. — Vol. 206, iss. 2. — P. 873–887.
4. **Hernández M.A., Salanova M.A.** Sufficient conditions for semilocal convergence of a fourth order multipoint iterative method for solving equations in Banach spaces // Southwest J. Pure and Appl. Math. — 1999. — Vol. 1. — P. 29–40.
5. **Zheng L., Gu C.** Fourth-order convergence theorem by using majorizing functions for super-Halley method in Banach spaces // Int. J. Comp. Math. — 2013. — Vol. 90. — P. 423–434.
6. **Cordero A., Hernández-Verón M.A., Romero N., and Torregrosa S.** Semilocal convergence by using recurrence relations for fifth-order method in Banach spaces // J. Comput. Appl. Math. — 2015. — Vol. 273. — P. 205–213.

7. **Cordero A., Ezquerro J.A., Hernández-Verón M.A., and Torregrosa S.** On the local convergence of a fifth-order iterative method in Banach spaces // J. Appl. Math. Comput. — 2015. — Vol. 251. — P. 396–403.

8. **Singh S., Gupta D.K., Martínez E., and Hueso J.L.** Semilocal and local convergence of a fifth order iteration with Fréchet derivative satisfying Hölder condition // J. Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 276. — P. 266–277.

9. **Ganesh M., Joshi M.C.** Numerical solvability of Hammerstein integral equations of mixed type // IMA. J. Numer. Anal. — 1991. — Vol. 11. — P. 21–31.

10. **Ezquerro J.A., Hernández M.A.** On the R-order of the Halley method // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 303, iss. 2. — P. 591–601.

11. **Ezquerro J.A., Hernández M.A.** New iterations of R-order four with reduced computational cost // BIT Numer. Math. — 2009. — Vol. 49, iss. 2. — P. 325–342.

12. **Bruns D.D., Bailey J.E.** Nonlinear feedback control for operating a nonisothermal CSTR near an unstable steady state // Chem. Eng. Sci. — 1977. — Vol. 32, iss. 3. — P. 257–264.

13. **Argyros I.K.** Remarks on the convergence of Newton's method under Hölder continuity conditions // Tamkang J. Math. — 1992. — Vol. 23. — P. 269–277.

14. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Functional Analysis. — Oxford: Pergamon Press, 1982.

15. **Ostrowski A.M.** Solution of Equations and Systems of Equations. — New York, London: Academic Press, 1966.

16. **Traub J.F.** Iterative Methods for the Solution of Equations. — New York: Chelsea Publishing Company, 1982.

17. **Grau-Sánchez M., Grau Á., and Noguera M.** On the computational efficiency index and some iterative methods for solving systems of nonlinear equations // J. Comput. Appl. Math. — 2011. — Vol. 236. — P. 1259–1266.

18. **Gautschi W.** Numerical Analysis: An introduction. — Boston: Birkhäuser, 1997.

19. **Sharma J.R., Gupta P.** An efficient fifth order method for solving systems of nonlinear equations // J. Comput. Math. Appl. — 2014. — Vol. 67, iss. 3. — P. 591–601.

20. **Chen L., Gu C., and Ma Y.** Semilocal convergence for a fifth-order Newton's method using recurrence relations in Banach spaces // J. Appl. Math. — 2011. — Vol. 2011. — (Article ID 786306).

21. **Hernández-Verón M.A., Martínez E.** On the semilocal convergence of a three steps Newton-type iterative process under mild convergence conditions // Numer. Algor. — 2015. — Vol. 70, iss. 2. — P. 377–392.

Поступила в редакцию 3 октября 2016 г.