

УДК 539.375

УТОЧНЕНИЕ ГРАНИЦЫ ЗОНЫ ПЛАСТИЧНОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ДЛЯ КВАЗИВЯЗКОГО И ВЯЗКОГО ТИПОВ РАЗРУШЕНИЯ

М. Е. Кожевникова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: kozhevnikova@hydro.nsc.ru

Предложено уточнение решения задачи об изолированной трещине нормального отрыва в тонкой пластине достаточно большой протяженности в упругопластической постановке. Приведены оценки пластической зоны в окрестности вершины трещины для квазивязкого и вязкого типов разрушения.

Ключевые слова: трещина, зона пластичности, квазихрупкий, квазивязкий, вязкий типы разрушения.

1. Постановка задачи. Неограниченную плоскую тонкую пластину с изолированной трещиной растягивают на бесконечности постоянными напряжениями σ_∞ , симметричными относительно оси x . Трещина моделируется двусторонним разрезом длины $2l_0$ [1]. С точки зрения прикладной механики зону предразрушения перед вершиной трещины целесообразно описывать двумя геометрическими параметрами: протяженностью Δ и поперечником h этой зоны [2]. В работах [2, 3] типы разрушения классифицируются по отношению длины зоны предразрушения Δ к длине трещины l_0 : хрупкий ($\Delta = 0$), квазихрупкий ($\Delta/l_0 = o(1)$), квазивязкий ($\Delta/l_0 = O(1)$ или $l_0/\Delta = O(1)$), вязкий ($l_0/\Delta = o(1)$). отождествим зону предразрушения с зоной пластичности. Эта задача имеет приближенное решение, которое в случае хрупкого и квазихрупкого типов разрушений, когда напряжение, заданное на бесконечности, заведомо меньше предела текучести, дает достаточно точный результат [1]. При этом в силу неравенства $\sigma_\infty \ll \sigma_m$ (σ_m — предел текучести) в формулах, определяющих напряжения, отсутствует гладкая часть, а именно напряжение σ_∞ [1]. Однако в случае квазивязкого и вязкого типов разрушений, когда $\Delta \approx l_0$, $\sigma_\infty = O(\sigma_m)$ и $l_0 < \Delta$, $\sigma_\infty \approx \sigma_m$, но $\sigma_\infty < \sigma_m$ соответственно, точности приближенного решения заведомо не хватает. Наша задача состоит в уточнении решения поставленной задачи и получении на его основе оценок границы зоны пластичности в окрестности вершины трещины.

2. Определение напряженного состояния в пластине с трещиной. Алгоритм нахождения напряженного состояния в тонкой пластине с трещиной реализуется в два этапа. Первый этап соответствует растяжению пластины без трещины напряжениями на бесконечности σ_∞ . На втором этапе для моделирования трещины отрезок $y = 0$, $|x| \leq l_0$ нагружают усилиями, противоположными по направлению усилиям, найденным на первом этапе, т. е. сжимающими усилиями $-\sigma_\infty$. Полное решение задачи есть сумма решений, найденных на этих двух этапах. Запишем решение для первого этапа

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = \sigma_\infty.$$

Граничные условия на линии трещины при $y = 0$, $|x| \leq l_0$ для второго этапа следующие:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = -\sigma_\infty.$$

Компоненты тензора напряжений для второго этапа вычисляются по формулам [1]

$$\sigma_{xx} = \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} [Z'_1], \quad \sigma_{yy} = \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} [Z'_1], \quad \sigma_{xy} = -y \operatorname{Re} [Z'_1]. \quad (1)$$

Здесь Z_1 — голоморфная функция:

$$Z_1 = \frac{\sigma_\infty}{\pi \sqrt{z^2 - l_0^2}} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{\sqrt{l_0^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi = \frac{J}{\sqrt{2\pi(z - l_0)}},$$

где

$$J = \frac{\sqrt{2}\sigma_\infty}{\sqrt{\pi(z + l_0)}} \int_{-l_0}^{l_0} \frac{\sqrt{l_0^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_\infty}{\sqrt{z + l_0}} \left(z - \sqrt{z^2 - l_0^2} \right).$$

При исследовании поведения поля напряжений в окрестности вершины трещины используется полярная система координат $z - l_0 = \rho e^{i\theta}$, $\rho = \sqrt{(x - l_0)^2 + y^2}$, $\theta = \operatorname{arctg} [y/(x - l_0)]$ при $x > l_0$; $\theta = \operatorname{arctg} [y/(x - l_0)] + \pi$ при $x \leq l_0$. При малых ρ получаем $J = K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi l_0}$ — постоянную величину, равную коэффициенту интенсивности напряжений, зависящему от распределения приложенных нормальных напряжений и длины трещины. Вычислим $\operatorname{Re} Z_1$, $\operatorname{Im} Z_1$, $\operatorname{Re} [Z'_1]$, $\operatorname{Im} [Z'_1]$, $\operatorname{Re} J$, $\operatorname{Im} J$, $\operatorname{Re} [J']$, $\operatorname{Im} [J']$ для произвольного ρ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left(\operatorname{Re} J \cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} J \sin \frac{\theta}{2} \right), & \operatorname{Im} Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left(-\operatorname{Re} J \sin \frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} J \cos \frac{\theta}{2} \right), \\ \operatorname{Re} [Z'_1] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ \operatorname{Re} [J'] \cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} [J'] \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2\rho} \left(\operatorname{Re} J \cos \frac{3\theta}{2} + \operatorname{Im} J \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right\}, \\ \operatorname{Im} [Z'_1] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ -\operatorname{Re} [J'] \sin \frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} [J'] \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2\rho} \left(\operatorname{Re} J \sin \frac{3\theta}{2} - \operatorname{Im} J \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right\}, \\ \operatorname{Re} J &= \sqrt{2\pi}\sigma_\infty \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_2}} \cos \left[\theta_1 - \frac{\theta_2}{2} \right] - \sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} \right), & (2) \\ \operatorname{Im} J &= \sqrt{2\pi}\sigma_\infty \left(\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_2}} \sin \left[\theta_1 - \frac{\theta_2}{2} \right] - \sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ \operatorname{Re} [J'] &= \sqrt{2\pi}\sigma_\infty \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \cos \frac{\theta_2}{2} - \frac{\rho_1}{2\sqrt{\rho_2^3}} \cos \left[\theta_1 - \frac{3\theta_2}{2} \right] - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \right), \\ \operatorname{Im} [J'] &= \sqrt{2\pi}\sigma_\infty \left(-\frac{1}{\sqrt{\rho_2}} \sin \frac{\theta_2}{2} - \frac{\rho_1}{2\sqrt{\rho_2^3}} \sin \left[\theta_1 - \frac{3\theta_2}{2} \right] + \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \sin \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \rho_2 = \sqrt{(x + l_0)^2 + y^2}; \quad \theta_1 = \operatorname{arctg} [y/x]; \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} [y/(x + l_0)].$$

Подставив (2) в (1), получим решение для второго этапа:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ \operatorname{Re} J \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \operatorname{Im} J \sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2\rho \left(\operatorname{Re} [J'] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \operatorname{Im} [J'] \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ \operatorname{Re} J \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \operatorname{Im} J \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\rho \left(\operatorname{Re} [J'] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \operatorname{Im} [J'] \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \right\} + \sigma_\infty, \quad (3) \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \left(\operatorname{Re} J \cos \frac{3\theta}{2} + \operatorname{Im} J \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\rho \left(\operatorname{Re} [J'] \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \operatorname{Im} [J'] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Если положить в формулах (2), (3) $y = 0$, то для $x \geq l_0$ получим [4]

$$\sigma_{xx} = \sigma_\infty x / \sqrt{x^2 - l_0^2} - \sigma_\infty, \quad \sigma_{yy} = \sigma_\infty x / \sqrt{x^2 - l_0^2}, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (4)$$

Заметим, что, находясь в рамках классической теории упругости, мы получили в вершине трещины сингулярность. Однако в реальных материалах, в частности в металлах и сплавах, прежде чем напряжения станут чрезмерно большими, появятся пластические деформации. В результате рост напряжений ограничен конечной величиной σ_m — пределом текучести материала, а перед фронтом трещины возникает зона пластичности. Точное определение конфигурации и размеров зоны пластичности является сложной задачей. Чтобы оценить границу зоны пластичности около вершины трещины при плоском напряженном состоянии, поступим следующим образом. Запишем критерий пластичности Мизеса в главных осях

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_m^2, \quad (5)$$

где

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2 \pm \sqrt{((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2)^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \sigma_3 = 0. \quad (6)$$

Третье главное напряжение выписано при плоском напряженном состоянии. Подставим (6) в (5) и получим равенство

$$3((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/2)^2 + 3\sigma_{xy}^2 + ((\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2)^2 = \sigma_m^2. \quad (7)$$

Пусть $\sigma_m/\sigma_\infty = p$. После подстановки формул (3) в равенство (7) получаем

$$\begin{aligned}&\{(3/4) \sin^2 \theta ([\operatorname{Im} J]^2 + [\operatorname{Re} J]^2 + 4\rho^2 [\operatorname{Re} [J']]^2 + [\operatorname{Im} [J']]^2) + \\ &\quad + 4\rho [\sin \theta (\operatorname{Re} J \operatorname{Im} [J'] - \operatorname{Im} J \operatorname{Re} [J']) - \cos \theta (\operatorname{Re} J \operatorname{Re} [J'] + \operatorname{Im} J \operatorname{Im} [J'])] + \\ &\quad + ([\operatorname{Re} J]^2 \cos^2 (\theta/2) + [\operatorname{Im} J]^2 \sin^2 (\theta/2) + \operatorname{Re} J \operatorname{Im} J \sin \theta)\} / (\rho \sigma_\infty^2) + \\ &\quad + \sqrt{2\pi} \{ (\operatorname{Re} J \cos (\theta/2) + \operatorname{Im} J \sin (\theta/2)) - (3/2) \sin \theta [-\operatorname{Re} J \sin (3\theta/2) + \operatorname{Im} J \cos (3\theta/2) + \\ &\quad + 2\rho (\operatorname{Re} [J'] \sin (\theta/2) - \operatorname{Im} [J'] \cos (\theta/2))] \} / (\sqrt{\rho} \sigma_\infty) + 2\pi(1 - p^2) = 0. \quad (8)\end{aligned}$$

Если в формуле (3), определяющей нормальное напряжение σ_{yy} , не принимать во внимание гладкую часть (напряжение σ_∞) и ограничиться исследованием асимптотического поведения напряжений вблизи вершины трещины ($\rho \ll l_0$), вместо формулы (8) для плоского напряженного состояния получим следующее приближенное равенство [1]:

$$\rho_p(\theta) \cong [1 + \cos \theta + (3/2) \sin^2 \theta] / (4p^2), \quad (9)$$

где $\rho_p = \rho/l_0$ — безразмерный радиус-вектор.

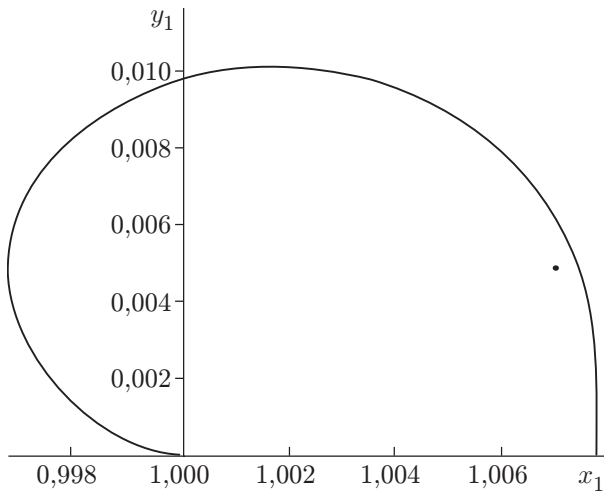


Рис. 1

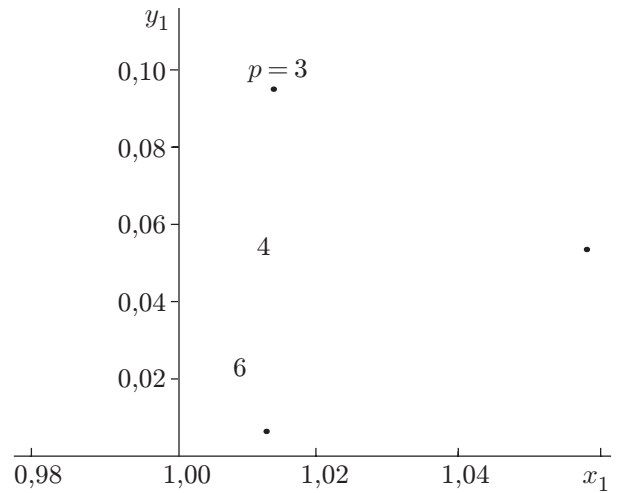


Рис. 2

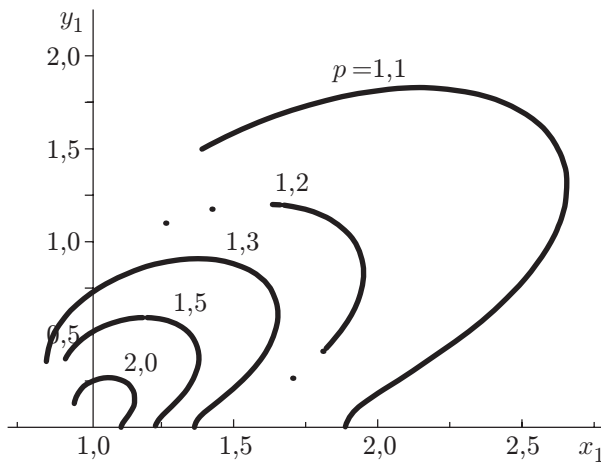


Рис. 3

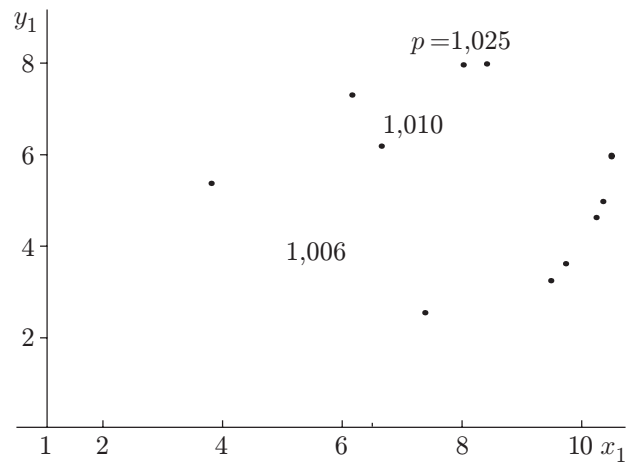


Рис. 4

На рис. 1 показаны границы зон пластичности, определяемые выражениями (8), (9) при $p = 8$ ($x_1 = x/l_0$, $y_1 = y/l_0$). Сплошная линия соответствует приближенному равенству (9), пунктирная — уравнению (8). При этом границы зон пластичности достаточно близки. Однако при $p < 8$ мы уже не можем говорить о близости границ зон пластичности, полученных с помощью уточненного и приближенного решений. На рис. 2–4 показаны кривые, построенные с использованием формулы (8). Видно, что зона пластичности при $p > 1$ не охватывает трещину, что согласуется с моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла [2, 5, 6]. Продольный размер зоны пластичности при $y = 0$ перед вершиной трещины может быть соизмерим с полудлиной трещины при $p \cong 1,1$ (см. рис. 3, квазивязкий тип разрушения) и может достигать пяти, шести и более полудлин трещины при $1 < p < 1,1$ (см. рис. 4, вязкий тип разрушения).

Оценим поперечный (h) и продольный (Δ) размеры зоны пластичности при $x_1 = 1$ и $y_1 = 0$ соответственно. Вычислим поперечник зоны пластичности h . В этом случае $\theta = \pi/2$, $\theta_1 = \arctg [y_1]$, $\theta_2 = \arctg [y_1/2]$, $\rho/l_0 = y_1$, $\rho_1/l_0 = \sqrt{y_1^2 + 1}$, $\rho_2/l_0 = \sqrt{y_1^2 + 4}$. Выразить y_1 через p даже после упрощения соотношения (8) весьма затруднительно. Поэтому подберем эмпирическую формулу для зависимости $p(y_1)$. Причем величину p вычислим из

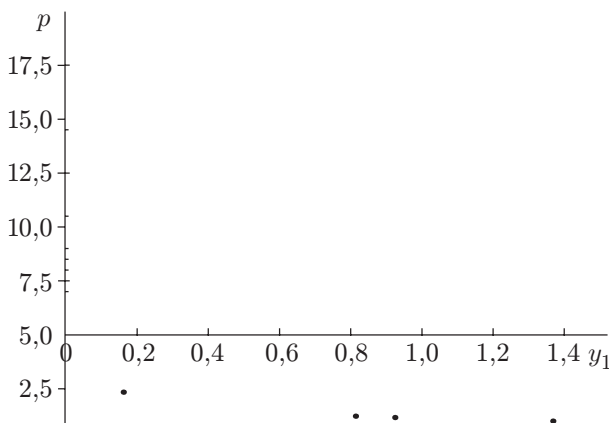


Рис. 5

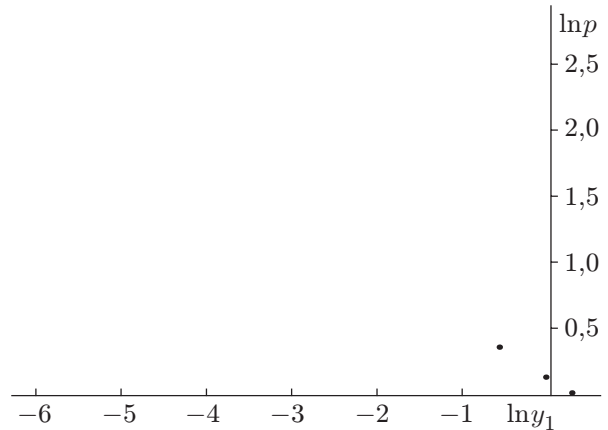


Рис. 6

уравнения (8) посредством подстановки в него определенного значения y_1 . Полагая начальное значение $y_1 = 0,0001$ и шаг, с которым оно будет увеличиваться, $h_1 = 0,001$, вычислим 1370 пар (y_1, p) . Построив график зависимости $p(y_1)$ (рис. 5) и сравнив его с графиком степенной функции из [7, с. 579], убедимся что для данного случая может подойти формула $p = ay_1^b$. Сходство графиков проверим по методу выравнивания. В данном случае выравниваются величины $X = \ln y_1$ и $Y = \ln p$: $Y = \ln a + bX$. Вычисляя для заданных значений y_1 и p соответствующие X и Y , увидим, что зависимость между X и Y практически линейна (рис. 6). Следовательно, формула выбрана правильно. Для определения констант a и b ищем линейную зависимость между величинами $\ln y_1$ и $\ln p$ методом средних. Разделим условные уравнения $Y = \ln a + bX$ для имеющихся пар X_i, Y_i на две группы по 685 уравнений каждая в порядке возрастания переменной X_i . Складывая уравнения каждой группы, получим два уравнения, из которых определим a и b :

$$471,4 = 685 \ln a - 948,11b; \quad 82,65 = 685 \ln a + 5,174b.$$

Отсюда $\ln a = 0,1237$, $a = 1,132$, $b = -0,408$. Значения p вычисляются по формуле $p = 1,132y_1^{-0,408}$. Выразив y_1 через p , найдем поперечник зоны пластичности

$$h = y_1 = 1,355p^{-2,45}.$$

Тогда критическое раскрытие трещины

$$h_m = 2l_0y(\varepsilon_m - \varepsilon_0) \approx 2,71p^{-2,45}l_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0), \quad (10)$$

где $\varepsilon_m - \varepsilon_0$ — максимальное относительное удлинение пластического материала. Для сравнения приведем критическое раскрытие трещины, полученное с помощью приближенного равенства (9) в работе [2]: $h_m^* = 1,25p^{-2}l_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0)$. Равенство $h_m = h_m^*$ имеет место при $p \approx 5,6$. Таким образом, приближенную формулу (9) можно использовать лишь для ограниченного числа параметров p , достаточно близких к $p \approx 5,6$ (см. табл. 1).

Теперь оценим продольный размер пластической области Δ . Заметим, что при $y_1 = 0$: $\theta = \theta_1 = \theta_2 = 0$, $\rho/l_0 = x_1 - 1$, $\rho_1/l_0 = x_1$, $\rho_2/l_0 = x_1 + 1$. Тогда из выражения (8), а также при подстановке формулы (4) в равенство (7) получаем выражение

$$x_1 = (\sqrt{4p^2 - 3} + 1) / \sqrt{4p^2 - 6 + 2\sqrt{4p^2 - 3}}.$$

Следовательно, оценка длины зоны пластичности, полученная с помощью уточненного решения, запишется в виде

$$\Delta = (x_1 - 1)l_0 = ((\sqrt{4p^2 - 3} + 1) / \sqrt{4p^2 - 6 + 2\sqrt{4p^2 - 3}} - 1)l_0. \quad (11)$$

Таблица 1

p	$h_m/(l_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0))$	$h_m^*/(l_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0))$
1,006	2,670	1,235
1,2	1,734	0,870
1,5	1,000	0,550
2,0	0,500	0,310
4,0	0,090	0,078
6,0	0,034	0,034
10,0	0,010	0,013
20,0	0,002	0,003

Таблица 2

p	$2\Delta/l_0$	$2\Delta^*/l_0$	Δ^{**}/l_0
1,006	13,08	0,99	105,740
1,010	10,22	0,98	63,300
1,100	1,78	0,83	6,030
1,200	1,03	0,69	2,860
1,500	0,45	0,44	1,000
3,000	0,09	0,11	0,154
10,000	0,01	0,01	0,013

Оценка длины зоны пластичности, полученная с помощью приближенного равенства (9), имеет вид [1]

$$\Delta^* = 0,5p^{-2}l_0. \tag{12}$$

Ирвин вычислил длину зоны пластичности Δ^* для трещины нормального отрыва, принимая в первом приближении нормальное напряжение, действующее на участке длиной Δ^* , равным пределу текучести материала [8]. Однако при “срезании” пика напряжений введением зоны пластичности нарушается равновесие сил, передаваемых этими напряжениями [8], вследствие чего величина Δ^* оказывается заниженной по сравнению с реальным размером зоны пластичности. Равновесие может быть достигнуто только смещением поля напряжений на длину, равную Δ^* . Эта процедура сводится к фиктивному удлинению трещины на величину Δ^* — поправку Ирвина на пластичность. Таким образом, при второй аппроксимации, когда принимается во внимание равновесие нагрузок, размер зоны пластичности в два раза больше по сравнению с размером, соответствующим первой аппроксимации [8]. Заметим, что формулу (11) можно получить, если в первом приближении положить напряжение $\sigma_{yy} = \sqrt{\sigma_m^2 - 3\sigma_\infty^2/4} - \sigma_\infty/2$. Поскольку формулы (10)–(12) были получены при использовании первой аппроксимации [8], значения h_m , Δ , Δ^* следует удвоить.

Модели, в которых учитываются силы сцепления, основываются на предположении, что у вершины трещины на длине Δ^{**} действуют силы сцепления, оказывающие сопротивление внешним нагрузкам. Интенсивность сил сцепления меняется в зависимости от модели [9]. Модель Леонова — Панасюка — Дагдейла [5, 6], в которой силы сцепления имеют постоянное значение, равное пределу текучести материала, используется чаще других. Соотношение

$$\Delta^{**} = l_0[\sec(\pi/(2p)) - 1] \tag{13}$$

дает длину зоны пластичности при плоском напряженном состоянии в соответствии с этой моделью [1]. Сравним размеры зон пластичности, определяемые формулами (11)–(13), учитывая, что имеет место плоское напряженное состояние. Формулы (11), (12) определяют половину длины зоны пластичности, поэтому сравнивать надо величины $2\Delta/l_0$, $2\Delta^*/l_0$ и Δ^{**}/l_0 . Согласно табл. 2 при $p \geq 1,5$ (квазихрупкий, хрупкий типы разрушения) наблюдается значительное сходство безразмерных величин $2\Delta/l_0$, $2\Delta^*/l_0$. Умеренное расхождение величин $2\Delta/l_0$, $2\Delta^*/l_0$ наблюдается при $1,1 \leq p < 1,5$ (квазихрупкий тип разрушения). При $1 < p < 1,1$ (квазивязкий, вязкий типы разрушения) ни о каком сходстве величин $2\Delta/l_0$, $2\Delta^*/l_0$ не может быть и речи. Кроме того, при $1 \leq p < 3$ длина зоны пластичности, вычисленная по модели Ирвина, отличается от ее значения, вычисленного по модели Леонова — Панасюка — Дагдейла. При $p \geq 3$ совпадение сравниваемых величин, полученных по рассматриваемым моделям, учитывая сильное различие между используемыми моделями, можно считать хорошим. Следует отметить, что реальный размер зоны

пластичности значительно меньше размера, вычисленного с помощью модели Леонова — Панасюка — Дагдейла, что является следствием трехосности [9].

Таким образом, используя уточненное решение задачи в упругопластической постановке, мы получили оценки зоны пластичности для квазивязкого, вязкого типов разрушения, которые невозможно было получить из приближенного решения. Выяснилось, что если при вычислении продольного размера зоны пластичности для квазихрупкого типа разрушения вполне достаточно использовать приближенное решение, то при вычислении поперечника зоны пластичности приближенное решение можно применять лишь для ограниченного набора параметров p . Зная оценки зоны пластичности (длину 2Δ и поперечник h), можно уточнить рекомендации по использованию достаточного критерия прочности при квазивязком типе разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керштейн И. М., Ключников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А. Основы экспериментальной механики разрушения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
2. Корнев В. М. Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 153–161.
3. Бичем К. Д. Микропроцессы разрушения // Разрушение: В 7 т. Т. 1. Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения. М.: Мир, 1973. С. 265–375.
4. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988.
5. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
6. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets cotaining slit // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
7. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 15-е изд. М.: Наука, 1968.
8. Сиратори М., Миёси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986.
9. Плювинаж Г. Механика упругопластического разрушения. М.: Мир, 1993.

*Поступила в редакцию 2/VI 2003 г.,
в окончательном варианте — 27/V 2004 г.*
