

УДК 531.01

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. Бегматов

Национальный университет Узбекистана, 100174 Ташкент, Узбекистан

E-mail: begmatov_ab@rambler.ru

Рассматриваются две задачи о плоских затухающих поверхностных волнах в неоднородной среде: задача о распространении волн, аналогичных волнам Рэлея, в изотропном упругом полупространстве, граничащем со слоем идеальной несжимаемой жидкости, и задача о распространении волн, аналогичных волнам Лява, в полуограниченной насыщенной пористой среде, граничащей со слоем изотропной упругой среды.

Ключевые слова: волны Рэлея и Лява, плоская затухающая волна, пористая среда.

DOI: 10.15372/PMTF20160613

Как известно, в изотропной упругой среде, занимающей полупространство, при слабых синусоидальных возмущениях возникают плоские поверхностные волны (волны Рэлея), затухающие по мере удаления от свободной поверхности [1, 2]. Кроме того, волны, аналогичные волнам Рэлея, распространяются в слое жидкости, граничащем с полуограниченной упругой средой [3, 4]. В неоднородной упругой среде возникают также чисто сдвиговые волны — волны Лява [2]. В настоящей работе рассматривается распространение плоских поверхностных волн, аналогичных волнам Рэлея и Лява [5].

1. Распространение плоских волн в упругом полупространстве, расположенном под слоем идеальной несжимаемой жидкости. Пусть слой идеальной несжимаемой жидкости расположен над изотропной упругой средой, занимающей нижнее полупространство. Рассматривая плоскую задачу, примем, что горизонтальная ось Ox является границей раздела между жидкостью и упругой средой, а ось Oz направлена вертикально вверх. При этом упругая среда занимает область $\Omega^- = \{-\infty < x < \infty; -\infty < z < 0\}$, а слой жидкости — область $\Omega^+ = \{-\infty < x < \infty; 0 < z < h\}$.

В области Ω^- скалярный потенциал φ и векторный потенциал ψ удовлетворяют соответственно уравнениям [1]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad (1.1)$$

где a_1, a_2 — соответственно скорость распространения продольной и поперечной волн:

$$a_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_1, \quad a_2^2 = \mu/\rho_1,$$

λ, μ — параметры Ламе; ρ_1 — плотность упругой среды.

Так как в области Ω^+ жидкость совершает потенциальное движение под действием силы тяжести, то в этой области имеет место интеграл Коши — Лагранжа [1, 6]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_2} + gz = F(t), \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$; g — ускорение свободного падения; p , ρ_2 — давление и плотность жидкости; потенциал скорости Φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.3)$$

Требуется найти функции φ , ψ и Φ , удовлетворяющие соответственно в областях Ω^- и Ω^+ уравнениям (1.1), (1.3) и условиям

$$y = h: \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0; \quad (1.4)$$

$$z = 0: \quad 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0; \quad (1.5)$$

$$z = 0: \quad (a_1^2 - 2a_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2a_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + a_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad (1.6)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad (1.7)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Условие (1.4) на свободной поверхности жидкости $z = \zeta(x, t)$ записано для невозмущенной поверхности $z = h$, поскольку рассматриваются слабые возмущения [6]. Условие (1.5) означает отсутствие касательных напряжений (ψ — проекция векторного потенциала на ось, перпендикулярную рассматриваемой плоскости). Условие (1.6) представляет собой условие непрерывности нормальных напряжений на границе раздела сред ($z = 0$), условие (1.7) — условие непрерывности нормальных составляющих скоростей перемещения частиц жидкости и упругой среды.

Решения задачи будем искать в виде

$$\Phi = f_1(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \varphi = f_2(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \psi = f_3(z) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в уравнения (1.1), (1.3), получаем следующие уравнения:

$$\frac{d^2 f_i}{dz^2} - k_i^2 f_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad k_1^2 = k^2, \quad k_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a_1^2}, \quad k_3^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{a_2^2}. \quad (1.10)$$

Решения уравнений (1.10), удовлетворяющие условию (1.8), имеют вид

$$f_1 = A_1 e^{kz} + A_2 e^{-kz}, \quad f_2 = B e^{zr}, \quad f_3 = C e^{zs},$$

где A_1, A_2, B, C — постоянные.

Используя условия (1.4)–(1.7), получаем четыре однородных уравнения. Условие разрешимости этих уравнений (характеристическое уравнение) имеет вид

$$\frac{1}{\xi^4} \left[(2 - \xi^2)^2 - 4\sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - \left(\xi \frac{a_2}{a_1}\right)^2} \right] = \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{1 - \left(\xi \frac{a_2}{a_1}\right)^2} \frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\xi^2 - \xi_\infty^2} \text{th } kh, \quad (1.11)$$

где

$$\xi = \frac{c}{a_2}, \quad c = \frac{\omega}{k}, \quad \xi_0^2 = \frac{\xi_1^2}{kh \text{th } kh}, \quad \xi_\infty^2 = \xi_1^2 \frac{\text{th } kh}{kh}, \quad \xi_1^2 = \frac{gh}{a_2^2}. \quad (1.12)$$

В уравнении (1.11) ξ — искомая скорость распространения поверхностных волн, отнесенная к скорости a_2 распространения поперечных волн упругой среды. Обозначим левую часть равенства (1.11) через $f_1(\xi, \sigma)$, а правую — через $f_2(\xi, \sigma)$. Кривые, описываемые функциями f_1 и f_2 , обозначим соответственно Γ_1 и Γ_2 .

Точка пересечения кривых Γ_1 и Γ_2 является корнем характеристического уравнения (1.11), определяющим искомую скорость распространения поверхностных волн:

$$\sigma = \frac{1 - 2(a_2/a_1)^2}{2(1 - a_2/a_1)^2} \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Существование и положение этих точек зависят от характера изменения функций $f_1(\xi, \sigma)$ и $f_2(\xi, \sigma)$. Отметим некоторые свойства этих функций. Функция $f_1(\xi, \sigma)$ монотонно возрастает от $-\infty$ при $\xi = 0$ до единицы при $\xi = 1$. Равенство $f_1(\xi, \sigma) = 0$ представляет собой характеристическое уравнение, из которого определяется скорость $\xi_R(\sigma)$ распространения волн Рэлея [1]:

$$f_1(\xi, \sigma)|_{\xi=\xi_R} = 0,$$

причем

$$f_1(\xi, \sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \xi_R(\sigma) < \xi \leq 1, \quad f_1(\xi, \sigma) < 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi < \xi_R(\sigma). \quad (1.13)$$

Функция $f_2(\xi, \sigma)$ равна нулю при $\xi = \xi_0$ и имеет разрыв второго рода при $\xi = \xi_\infty$:

$$f_2(\xi, \sigma)|_{\xi=\xi_\infty \pm 0} = \mp \infty.$$

В интервале $0 \leq \xi < \xi_\infty$ функция f_2 монотонно возрастает от $\rho_2/(\rho_1 \operatorname{th} kh)$ при $\xi = 0$ до $+\infty$ при $\xi = \xi_{\infty-0}$, а в интервале $\xi_\infty < \xi \leq 1$ — от $-\infty$ при $\xi = \xi_{\infty+0}$ до $f_2(1; \sigma) = (\rho_2/\rho_1)\sqrt{1 - (a_2/a_1)^2} \operatorname{th} kh (1 - \xi_0^2)/(1 - \xi_\infty^2)$ при $\xi = 1$. При этом $f_2(1; \sigma) \geq 0$, если $kh \operatorname{th} kh \geq \xi_1^2 > 0$, и $f_2(1; \sigma) < 0$, если $kh \operatorname{th} kh < \xi_1^2$. Из этих условий и из (1.12) следует, что если $\xi_1 \leq \xi_R(\sigma)$, то в интервале $0 \leq \xi < \xi_\infty$ имеют место неравенства $f_1(\xi; \sigma) < 0$, $f_2(\xi; \sigma) > 0$ и поэтому кривые Γ_1 и Γ_2 не пересекаются.

Если $\xi_\infty \geq \xi_R$, $kh > 0$ и, следовательно, $\xi_1 > \xi_R(\sigma)$, то кривые Γ_1 и Γ_2 также не пересекаются, поскольку в области $\xi_\infty < \xi \leq 1$ имеет место неравенство $f_1(\xi, \sigma) > f_2(\xi, \sigma)$. При $\xi_R < \xi < \xi_0$ кривые Γ_1 и Γ_2 располагаются по разные стороны от прямой $\xi = \xi_\infty$. Таким образом, пересечение кривых Γ_1 и Γ_2 может иметь место при $\xi_1 \leq \xi_R(\sigma)$, $kh > 0$ лишь в области $\xi_\infty < \xi \leq 1$. При этом в зависимости от положения точки $\xi = \xi_0$, в которой функция $f_2(\xi; \sigma)$ равна нулю, возможны следующие случаи:

- 1) $\xi_\infty < \xi_0 \leq \xi_1$, или согласно (1.12) $1 \leq kh \operatorname{th} kh < \infty$;
- 2) $\xi_1 < \xi_0 < \xi_R(\sigma)$, или согласно (1.12) $(\xi_1/\xi_R)^2 \leq kh \operatorname{th} kh < 1$;
- 3) $\xi_1 < \xi_R(\sigma) < \xi_0 \leq \xi_* < \infty$, или согласно (1.12) $(\xi_1/\xi_*)^2 \leq kh \operatorname{th} kh < (\xi_1/\xi_R)^2$.

Здесь $\xi_1 = \sqrt{gh}/a_2$ — скорость распространения длинных волн в жидкости, отнесенная к a_2 ; $\xi_\infty \approx \xi_1$ при $\operatorname{th} kh \approx kh$ и $\xi_\infty \approx c_2/a_2$ при $\operatorname{th} kh \approx 1$; $c_2 = \sqrt{g/k}$ — скорость распространения коротких волн в жидкости.

Во всех трех случаях при $\sigma \in [0, 1/2]$ кривые Γ_1 и Γ_2 пересекаются в двух точках: в точке $\xi = \xi_*$, расположенной вблизи точки $\xi = \xi_R(\sigma)$, и в точке $\xi = \xi_w$ ($\xi_w > \xi_\infty$), расположенной вблизи точки $\xi = \xi_\infty$. В первом и втором случаях $\xi_*(\sigma) > \xi_R(\sigma)$, т. е. скорость распространения волн в упругой среде больше скорости волн Рэлея, в третьем случае, наоборот, $\xi_*(\sigma) < \xi_R(\sigma)$, т. е. скорость распространения волн в упругой среде меньше скорости волн Рэлея.

Точки пересечения кривых Γ_1 и Γ_2 — корни дисперсионного уравнения (1.11) — можно найти с использованием известных численных методов или приближенных формул. Для того чтобы получить данные формулы, положим

$$\xi_*^2(\sigma) = \xi_R^2(\sigma)(1 + \varepsilon), \quad \xi_w^2(\sigma) = \xi_\infty^2(\sigma)(1 + \varepsilon_w) \quad (1.14)$$

и подставим эти выражения в характеристическое уравнение (1.11). Принимая $\varepsilon^2 \ll 1$, $\varepsilon_w^2 \ll 1$, используя разложение по степеням ε , ε_w и ограничиваясь двумя членами разложения, получаем

$$\varepsilon = \frac{b_2(\rho_2/\rho_1)\xi_R^2 \operatorname{th} kh}{2b_4A_1 - \sqrt{b_2}\xi_R^2(\rho_2/\rho_1)A_2 \operatorname{th} kh}; \quad (1.15)$$

$$\varepsilon_w = \frac{(\rho_2/\rho_1)\xi_\infty^2 B_1 B_2 \operatorname{th} kh}{|f_1(\xi_\infty; \sigma)| - (\rho_2/\rho_1)\xi_\infty^2 B_2 [2\xi_0^2 - 3\xi_\infty^2 - (B_1/B_2)\xi_\infty^2 (a_2/a_1)^2]}, \quad (1.16)$$

где

$$b_2 = 1 - \left(\frac{a_2}{a_1} \xi_R\right)^2, \quad b_4 = b_3 \sqrt{b_1 b_2} - (1 + b_1), \quad b_1 = 1 - \xi_R^2(\sigma), \quad b_3 = b_1^{-1} + b_2^{-1} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2,$$

$$A_1 = \frac{\xi_R^2 - \xi_\infty^2}{\xi_R^2 - \xi_0^2}, \quad A_2 = 2 + \xi_R^2 \left[1 - \frac{1}{2b_2} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\right],$$

$$B_1 = \xi_0^2 - \xi_\infty^2, \quad B_2 = \sqrt{1 - \left(\xi_\infty \frac{a_2}{a_1}\right)^2}.$$

Погрешности расчетов по формулам (1.14)–(1.16), зависящие от $\sigma \in [0, 1/2]$ и kh , уменьшаются при перемещении от точки $\sigma = 1/2$ к точке $\sigma = 0$. Согласно расчетам максимальная погрешность для ξ_* при $\sigma = 1/2$ не превышает 10 %, если величина kh удовлетворяет следующим условиям:

— в первом случае при $kh \operatorname{th} kh \leq 1$ и во втором случае при $1 < kh \operatorname{th} kh < \infty$

$$kh \frac{1,1394 \operatorname{th} kh - 1}{1,1394 - \operatorname{th} kh} \leq \left(\frac{\xi_1}{\xi_R/2}\right)^2 < kh \operatorname{th} kh;$$

— в третьем случае при $A < 0$

$$kh \operatorname{th} kh < \left(\frac{\xi_1}{\xi_R/2}\right)^2 \leq \frac{1 + 0,7026 \operatorname{th} kh}{0,7026 + \operatorname{th} kh} kh,$$

при $A > 0$

$$kh \frac{1,1394 \operatorname{th} kh - 1}{1,1394 - \operatorname{th} kh} \leq \left(\frac{\xi_1}{\xi_R}\right)^2 < kh \operatorname{th} kh.$$

В первом и втором случаях приведенная выше оценка погрешности справедлива для формулы (1.16) при любых значениях kh в указанных интервалах, а в третьем случае — при выполнении условия $\left(\frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\xi_1^2}{kh}\right)^2 \ll 1$. Результаты расчета по формулам (1.14)–(1.16) и с использованием численного метода для случая $\sigma = 1/2$ приведены в таблице. Из таблицы следует, что значения корней характеристического уравнения, найденные по приближенной формуле и с помощью численного метода, удовлетворительно согласуются. При этом в первом и втором случаях с увеличением kh относительная погрешность увеличивается, а в третьем случае уменьшается.

2. Распространение чисто сдвиговых затухающих волн в неоднородной среде. Пусть сплошная среда, находящаяся в нижнем полупространстве, состоит из слоя изотропной упругой среды, занимающей область $\Omega^+ = \{-\infty < x < \infty; -h < z < 0\}$, и насыщенной жидкостью пористой среды, занимающей область $\Omega^- = \{-\infty < x < \infty; -\infty < z < -h\}$.

Движение частиц твердой и жидкой фаз в области Ω^- описывается системой, состоящей из четырех уравнений: уравнений движения и уравнений неразрывности для

Корни характеристического уравнения, полученные с использованием численного метода и приближенных формул

ξ_1	ξ_0	ξ_∞	ξ_R	kh	ξ_*		ξ_w	
					Расчет с помощью численного метода	Расчет по приближенным формулам	Расчет с помощью численного метода	Расчет по приближенным формулам
0,6684	0,5505	0,5074	0,9550	1,6000	0,9848	0,9874	0,5098	0,5098
0,0100	0,5000	0,0100	0,9550	0,0200	0,9559	0,9556	1,0005	1,0010
0,5000	2,0000	0,5000	0,9550	0,2500	0,8883	0,9189	0,5771	0,5861
0,5000	1,0000	0,4793	0,9550	0,5200	0,9528	0,9115	0,5020	0,5019

каждой фазы [7]. Представление векторов перемещения твердой и жидкой фаз в виде $\mathbf{w}_1 = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot } \boldsymbol{\psi}_1$, $\mathbf{w}_2 = \text{grad } \varphi_2 + \text{rot } \boldsymbol{\psi}_2$ позволяет расщепить эту систему на системы уравнений, описывающих распространение продольных и поперечных волн. При этом систему уравнений для поперечных волн можно свести к релаксационному уравнению [7]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}_1}{\partial t^2} - \frac{\lambda_2}{\rho_1} \nabla^2 \boldsymbol{\psi}_1 \right) + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}_1}{\partial t^2} - \frac{\lambda_2(1 - m_0)}{\rho_0} \nabla^2 \boldsymbol{\psi}_1 \right) = 0; \tag{2.1}$$

$$\tau = \frac{a_0 \rho_1}{\nu m_0 \rho_0}, \quad \rho_0 = (1 - m_0) \rho_1 + m_0 \rho_2, \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho},$$

где c — скорость распространения поперечной волны в верхнем упругом слое; τ — характерное время релаксации; m_0 — пористость; ρ — плотность упругого слоя; ρ_1, ρ_2 — плотности твердой и жидкой фаз насыщенной пористой среды соответственно; ν — кинематическая вязкость.

Аналогично распространение поперечных волн в упругом слое Ω^+ описывается следующим уравнением для векторного потенциала $\boldsymbol{\psi}$ вектора перемещения \mathbf{w} :

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}. \tag{2.2}$$

Следуя работе [2], введем перемещения вида

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1(0, w_1(z), 0) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}(0, w(z), 0) e^{i(kx - \omega t)}.$$

При этом решения уравнений (2.1), (2.2) соответственно будем искать в виде

$$\boldsymbol{\psi}_1 = e^{i(\omega t - kx)} g(z), \quad -\infty < z < -h, \quad \boldsymbol{\psi} = e^{i(\omega t - kx)} f(z), \quad -h < z < 0, \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}_1$ — проекции соответствующих векторных потенциалов на ось Oy . Как и в рассмотренной выше задаче, эти решения должны удовлетворять следующим граничным условиям [1, 2]:

— на свободной поверхности ($z = 0$)

$$p_n^1 = p^{13} = 0, \quad p_n^2 = p^{23} = 0, \quad p_n^3 = p^{33} = 0; \tag{2.4}$$

— на границе раздела ($z = -h$)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial z} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_1}{\partial z}, \quad \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial z^2} = \lambda_2(1 - m_0) \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}_1}{\partial z^2} \tag{2.5}$$

(p_n^i, p^{ij} — компоненты вектора и тензора напряжений соответственно). В бесконечно удаленных от свободной поверхности точках амплитуда колебаний стремится к нулю.

Из закона Гука для изотропной упругой среды следует, что в (2.4) первое и третье условия выполняются автоматически, а второе условие принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и (2.2), получаем уравнения

$$\left(i\omega a_2^2 + \frac{1}{\tau} a_2'^2 \right) \frac{d^2 g}{dz^2} - \left(i\omega a_2^2 k^2 + \frac{1}{\tau} a_2'^2 k^2 - i\omega^3 - \frac{1}{\tau} \omega^2 \right) g = 0,$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) f = 0,$$

где $\omega^2/c^2 - k^2 > 0$; $a_2^2 = \lambda_2/\rho_1$, $a_2'^2 = \lambda_2(1 - m_0)/\rho_0$ — скорости распространения поперечных объемных волн в твердой и жидкой фазах соответственно. После подстановки решений $g(z)$ и $f(z)$ этих уравнений (с учетом условия на бесконечности) в (2.3) искомые решения принимают вид

$$\psi = (A \cos rz + A_1 \sin rz) e^{i(kx - \omega t)}, \quad \psi_1 = B e^{\alpha z + i(kx - \omega t)}, \quad (2.7)$$

где

$$\alpha^2 = \frac{i\omega a_2^2 k^2 + a_2'^2 k^2 / \tau - i\omega^3 - \omega^2 / \tau}{i\omega a_2^2 + a_2'^2 / \tau}.$$

Нетрудно показать, что при подстановке (2.7) в граничные условия (2.5), (2.6) эти условия сводятся к однородным уравнениям

$$r \cos rh A_1 - \alpha e^{-\alpha h} B = 0, \quad -r^2 \mu \sin rh A_1 - \lambda_2(1 - m_0) \alpha^2 e^{-\alpha h} B = 0,$$

где $r^2 = \omega^2/c^2 - k^2$. Из условия разрешимости этой системы получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$r \operatorname{tg} rh = b \left(\frac{i\omega a_2^2 k^2 + a_2'^2 k^2 / \tau - i\omega^3 - \omega^2 / \tau}{i\omega a_2^2 + a_2'^2 / \tau} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{1 - m_0}{d_1^2} \frac{\rho_1}{\rho}. \quad (2.8)$$

Приближенные значения корня дисперсионного уравнения (2.8) найдены для малых и больших значений параметра $\omega\tau$ в предположении

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v_s} - i \frac{\delta}{\omega}. \quad (2.9)$$

В случае малых значений этого параметра используем разложение

$$a_2^2 \frac{k^2}{\omega^2} = \beta_0 - (\beta_{11} + i\beta_{12})\varepsilon - (\beta_{21} + i\beta_{22})\varepsilon^2 - \dots, \quad \varepsilon = \omega\tau. \quad (2.10)$$

При разложении по степеням ε функций, входящих в уравнение (2.8), ограничимся двумя членами разложения. В результате получаем $\beta_{11} = 0$. Функция β_{12} имеет вид

$$\beta_{12} = \frac{1 - d^2}{d^2} \left[d^2 + \left(1 + \frac{h\omega^2(1 - \beta_0 d_1^2)/(bc^2)}{\sqrt{\omega^2(d^2\beta_0 - 1)/(a_2^2 d^2) \cos^2 h \sqrt{\omega^2(1 - \beta_0 d_1^2)/c^2}}} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{d_1^2(d^2\beta_0 - 1)}{1 - \beta_0 d_1^2} \right]^{-1}, \quad (2.11)$$

где β_0 определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} h \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} (1 - \beta_0 d_1^2)} = b \frac{\sqrt{\omega^2(d^2\beta_0 - 1)/(d^2 a_2^2)}}{\sqrt{\omega^2(1 - \beta_0 d_1^2)/c^2}}, \quad (2.12)$$

$d = a_2'/a_2$; $d_1 = c/a_2$.

Из формул (2.9), (2.10) следует, что выражения для скорости v_s распространения поверхностных волн сдвига и коэффициента затухания δ_s имеют вид

$$v_s = \frac{a_2}{\sqrt{\beta_0}}, \quad \frac{\delta_s}{\omega} = \varepsilon v_s \frac{\beta_{12}}{2a_2^2}. \quad (2.13)$$

Аналогично при больших значениях параметра $\omega\tau$ (высокочастотные волны) положим $\varepsilon = 1/(\omega\tau)$. С использованием разложения (2.10) находим

$$\beta_{11} = 0, \quad \beta_{12} = \frac{1 - d^2}{1 + \frac{d_1^2(\beta_0 - 1)}{1 - \beta_0 d_1^2} \left(1 + \frac{h\omega^2(1 - \beta_0 d_1^2)/(bc^2)}{\sqrt{\omega^2(\beta_0 - 1)/a_2^2 \cos^2 h \sqrt{\omega^2(1 - \beta_0 d_1^2)/c^2}} \right)}, \quad (2.14)$$

где β_0 — корень уравнения

$$\operatorname{tg} h \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} (1 - \beta_0 d_1^2)} = b \frac{\sqrt{\omega^2(\beta_0 - 1)/a_2^2}}{\sqrt{\omega^2(1 - \beta_0 d_1^2)/c^2}}. \quad (2.15)$$

В этом случае ($\omega\tau \gg 1$) скорость распространения высокочастотной поверхностной волны v_s и коэффициент затухания δ_s также вычисляются по формулам (2.13), если подставить в них значения β_{12} и β_0 , найденные по формулам (2.14), (2.15).

Рассмотрим следующие частные случаи.

1. Пусть $h \rightarrow 0$, т. е. вся область $z < 0$ состоит из насыщенной пористой среды. При этом в случае $\varepsilon = \omega\tau$ из (2.11), (2.12) находим

$$\beta_0 \rightarrow \frac{1}{d^2}, \quad \beta_{12} \rightarrow \frac{1 - d^2}{d^4}, \quad v_s \rightarrow a'_2, \quad \delta_s \rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon \omega m_0 \rho_2 \frac{(1 - m_0)^2}{\rho_1 v_s}.$$

Этот результат совпадает с результатами работы [7] при малых $\omega\tau$.

В случае $\varepsilon = 1/(\omega\tau) \ll 1$ из (2.14), (2.15) следует

$$\beta_0 \rightarrow 1, \quad \beta_{12} \rightarrow 1 - d^2 = m_0 \frac{\rho_2}{\rho_0}, \quad v_s \rightarrow a_2, \quad \delta_s \rightarrow \varepsilon \omega \frac{1 - d^2}{2v_s} = \frac{1 - d^2}{2\tau v_s}.$$

Таким образом, скорость волны v_s , имеющей низкую частоту колебаний, меньше скорости волны, имеющей высокую частоту колебаний. При этом коэффициент затухания δ_s обратно пропорционален скорости распространения сдвиговых волн как при $\omega\tau \ll 1$, так и при $\omega\tau \gg 1$.

2. Пусть $h \rightarrow \infty$, т. е. область $z < 0$ является изотропной упругой средой. При этом $\beta_0 \rightarrow 1/d_1$, $\beta_{12} \rightarrow 0$, $v_s \rightarrow c$, $\delta_s \rightarrow 0$ как при $\omega\tau \ll 1$, так и при $\omega\tau \gg 1$, т. е. скорость сдвиговых поверхностных волн равна скорости поперечных объемных волн, а затухание отсутствует.

3. Если пористость $m_0 = 0$, т. е. $a'_2 = a_2$, то уравнение (2.12) совпадает с соответствующим дисперсионным уравнением задачи о волнах Лява [2]. Заметим, что волны Лява, в отличие от волн, рассматриваемых в данной работе, затухают только по мере удаления от свободной поверхности.

На рис. 1, 2 приведены результаты расчетов, полученные при $m_0 = 0,3$, $b = 1,9449$, $d = 0,9239$, $d_1 = c/a_2 = 0,75$. На рис. 1 представлена зависимость $\omega^* = h\omega/c$ от β_0 при $\omega\tau \ll 1$ и $\omega\tau \gg 1$, на рис. 2 — зависимость β_{12} от β_0 при $\omega\tau \ll 1$ и $\omega\tau \gg 1$.

На рис. 1 видно, что β_0 возрастает с увеличением $\omega^* = h\omega/c$ и, следовательно, согласно (2.13) скорость сдвиговых поверхностных волн v_s уменьшается с ростом ω^* . При

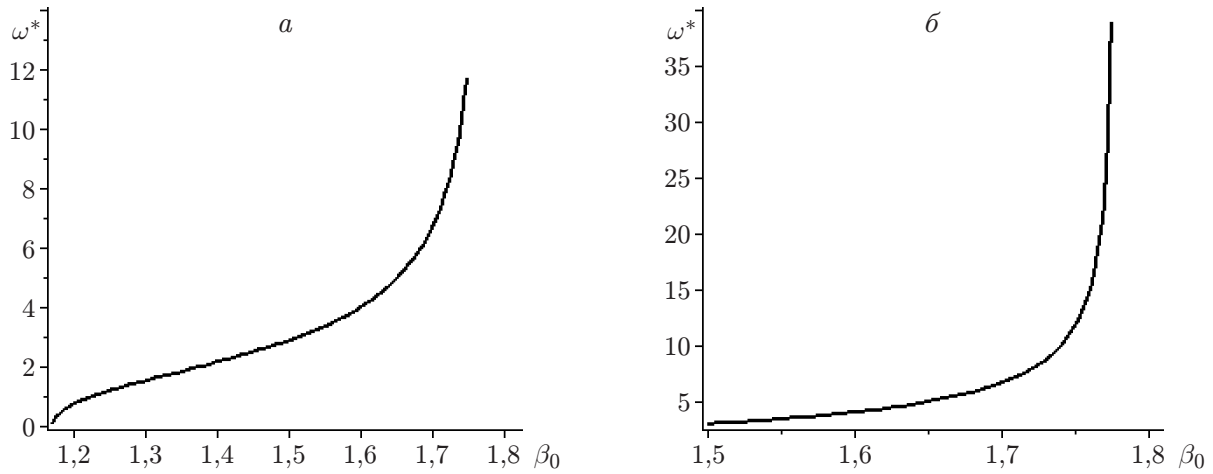


Рис. 1. Зависимость $\omega^*(\beta_0)$ при различных значениях $\omega\tau$:
a — $\omega\tau \ll 1$, *б* — $\omega\tau \gg 1$

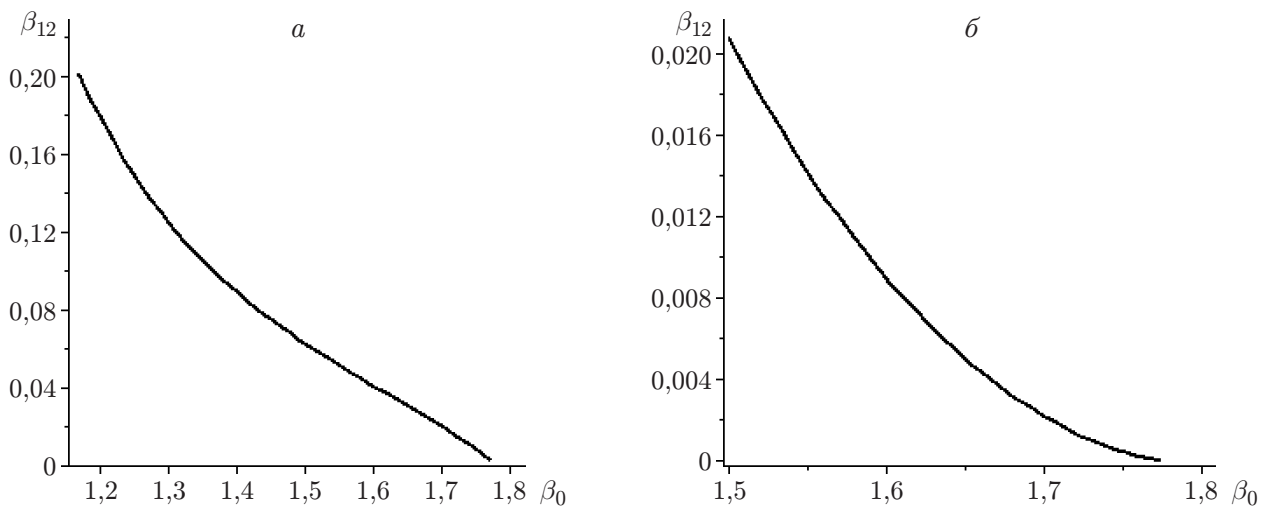


Рис. 2. Зависимость $\beta_{12}(\beta_0)$ при различных значениях $\omega\tau$:
a — $\omega\tau \ll 1$, *б* — $\omega\tau \gg 1$

малых и больших значениях ω^* дисперсия практически отсутствует: относительное изменение скорости v_s не превышает 2 % при изменении ω^* от нуля до единицы и от десяти до бесконечности.

Полученные формулы применимы для вычисления v_s и δ_s во всем диапазоне значений ω^* . При $\omega^* = 10$ значения v_s , вычисленные по формулам для низко- и высокочастотных волн, различаются не более чем на 1 %. Следовательно, при $0 \leq \omega^* \leq 10$ скорость v_s и коэффициент затухания δ_s можно вычислять по формуле (2.13) с помощью формул (2.11), (2.12), а при $\omega^* \geq 10$ — с помощью формул (2.14), (2.15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды: В 2 т. М.: Наука, 1973. Т. 2.
2. Снеддон И. Н. Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берн. М.: Физматгиз, 1961.

3. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
4. **Викторов И. А.** Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966.
5. **Бегматов А.** О затухающих волнах в неоднородной среде // Тез. Респ. науч. конф. с участием зарубежных ученых “Неклассические уравнения математической физики и их приложения”, Ташкент (Узбекистан), 23–25 окт. 2014 г. Ташкент: Нац. ун-т Узбекистана, 2014. С. 305–306.
6. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
7. **Николаевский В. Н.** Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 28/IX 2015 г.
