

УДК 532.5, 532.5.013.4, 532.517.3

ВИБРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ — ШОУ. ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

И. А. Бабушкин, В. А. Демин

Пермский государственный университет, 614990 Пермь
E-mail: babushkin@imail.ru

Экспериментально и теоретически изучено влияние высокочастотной горизонтальной вибрации на конвекцию в ячейке Хеле — Шоу, находящейся в однородном гравитационном поле. Исследованы нелинейные режимы вибрационной конвекции в надкритической области. Показано, что горизонтальные вибрации (в направлении широких граней ячейки) понижают порог устойчивости квазиравновесия. Найдены области существования одно- и двухвихревых стационарных течений, изучены нестационарные регулярные и хаотические режимы термовибрационной конвекции. Обнаружены новые хаотические режимы в ячейке Хеле — Шоу, которые являются результатом нелинейного взаимодействия “нижних” мод, отвечающих за реализацию регулярных надкритических конвективных режимов.

Ключевые слова: термовибрационная конвекция, ячейка Хеле — Шоу, регулярные и хаотические течения.

Введение. Конвективные течения в жидкостях и газах, возникающие в условиях пространственной неоднородности плотности в поле тяжести, являются одним из самых распространенных видов движения жидкостей и газов в природе. Такие течения характеризуются более богатым спектром структур по сравнению с изотермическими движениями, роль которых учитывается при конструировании разнообразных технических устройств. Этим объясняется интерес к рассмотрению условий возникновения гравитационно-конвективных течений, исследованию их устойчивости и пространственно-временной эволюции в различных ситуациях, например при воздействии переменных инерционных ускорений, вынужденного течения, пористой среды, неоднородности состава, магнитного поля или других осложняющих факторов.

В данной работе экспериментально и теоретически изучаются конвективные движения в вертикальной ячейке Хеле — Шоу при воздействии высокочастотных колебаний. Ячейка Хеле — Шоу представляет собой полость в форме прямоугольного параллелепипеда, два линейных размера которого много больше третьего. Полость подогревается снизу и подвергается горизонтальным вибрациям, которые ориентированы вдоль широких граней ячейки. Конвективные движения в ячейке Хеле — Шоу характерны тем, что плоскости траекторий располагаются параллельно широкому граням в широком диапазоне углов наклона полости. Из-за большого теплового и гидравлического сопротивления область колебательных режимов в ячейке Хеле — Шоу оказывается значительно ближе к основному уровню неустойчивости, чем в горизонтальном слое. Все это делает ячейку Хеле — Шоу удобной для экспериментальных (прежде всего оптических) методов исследования и для

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант Урал-2004, код проекта 04-02-96026) и Американского фонда гражданских исследований и развития (грант № PE-009-0).

теоретических расчетов, позволяя использовать приближение плоских траекторий. Экспериментально и теоретически свободная тепловая конвекция в ячейке Хеле — Шоу изучена в [1, 2]. Были определены границы устойчивости равновесия, исследована структура стационарных течений, описаны регулярные и некоторые хаотические колебательные режимы. Отметим, что указанные колебания явились одной из первых физических реализаций хаотического поведения в простых гидродинамических системах.

Первое теоретическое исследование вибрационной конвекции в ячейке Хеле — Шоу, находящейся в невесомости, представлено в работе [3], в которой показано, что вибрации индуцируют конвекцию даже при отсутствии силы тяжести. С точки зрения экспериментальной реализации интересны работы [4, 5], где конвекция рассматривалась в статическом поле тяжести при воздействии линейных вибраций и показано, что с увеличением вибрационного числа Рэлея критическое гравитационное число Рэлея уменьшается. Выполнен расчет различных режимов вибрационной конвекции в широком диапазоне значений определяющих параметров, проанализированы различные сценарии перехода к хаосу. Однако влияние высокочастотных вибраций на устойчивость механического равновесия, регулярные и хаотические надкритические конвективные течения в ячейке Хеле — Шоу ранее экспериментально не изучались.

Постановка задачи и эксперимент. Для экспериментального исследования конвективных течений в ячейке Хеле — Шоу была изготовлена лабораторная модель (рис. 1). Рабочая полость (высота $h = 40$ мм, длина $l = 20$ мм, толщина $2d = 2,0$ мм) сверху и снизу ограничена алюминиевыми теплообменниками толщиной 16 мм. В теплообменниках просверлены каналы диаметром 7,5 мм, чтобы организовать встречные потоки термостатирующей жидкости в соседних отверстиях для обеспечения однородности температуры вдоль верхней и нижней границ кюветы. Вода по каналам подавалась от струйных ультра-термостатов через патрубки (точность поддержания термостатами температуры $0,05$ °С). С боковых сторон полость ограничивалась плексигласовым массивом длиной 80 мм и шириной 50 мм. Значительные размеры массива практически исключали влияние внешних тепловых воздействий.

Рабочая жидкость заливалась в ячейку через патрубки с внешним диаметром 2 мм, на которые надевались эластичные резиновые трубки. После заправки полости жидкостью последние пережимались на расстоянии 50 мм от патрубков и играли роль демпферов давления. Разность температур между теплообменниками измерялась дифференциальной медьконстантановой термопарой (диаметр константанового провода 0,20 мм, медного 0,15 мм, длина спаев 1 мм). Спаи термопары помещались в отверстия в теплообменниках. Показания термопар измерялись цифровым вольтметром В7-54/3. Точность измерения разности температур составляла $0,025$ °С.

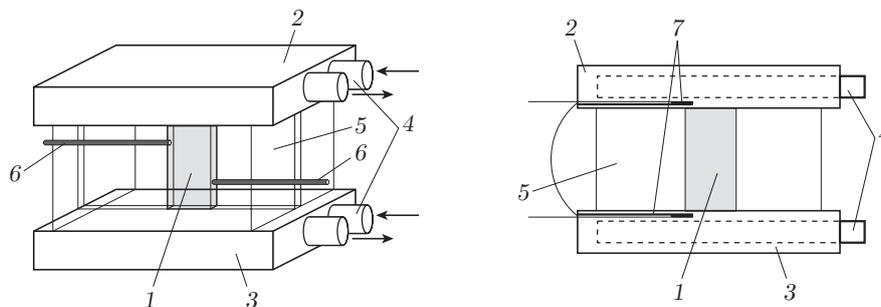


Рис. 1. Устройство конвективной камеры:

1 — рабочая полость; 2, 3 — алюминиевые теплообменники; 4 — патрубки; 5 — плексигласовый массив; 6 — патрубки; 7 — отверстия в теплообменниках

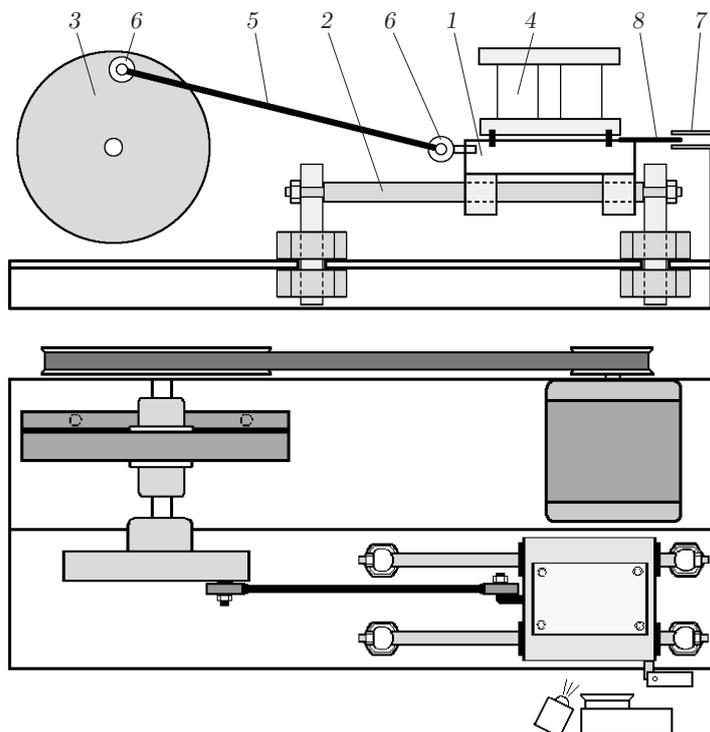


Рис. 2. Схема экспериментальной установки:

1 — столик; 2 — направляющие; 3 — маховик; 4 — кювета; 5 — каретка; 6 — подшипники; 7 — оптронная пара; 8 — пластинка

Для исследования влияния линейных вибраций на устойчивость конвективных течений в ячейке Хеле — Шоу был изготовлен вибростенд, схема которого представлена на рис. 2. Вибратор представляет собой кривошипно-шатунный механизм, преобразующий вращательное движение маховика (который, в свою очередь, приводится во вращение с помощью коллекторного электродвигателя через промежуточный вал со шкивом через ременную передачу) в возвратно-поступательное движение столика с кюветой вдоль направляющих. Использование шкивов разного диаметра на валу маховика и двигателе (14 и 5 см соответственно) положительно сказывается на точности поддержания частоты вибраций. Вращательное движение маховика преобразуется в поступательное движение каретки с помощью тяги, которая крепится к маховику и толкателю через подшипники. Использование коллекторного двигателя позволяет плавно изменять частоту вибраций в процессе опыта. Амплитуда колебаний каретки вибратора составляет 6 см.

Частота колебаний определяется с помощью частотомера марки ЧЗ-54, на вход которого подаются импульсы от оптронной пары, созданной на основе интегральной микросхемы. Световой поток, падающий от светодиода на фотодиод, прерывается пластинкой, закрепленной на каретке вибратора. Эта же схема используется для синхронного запуска лампы-вспышки при визуальных наблюдениях и видеосъемке. Эксперименты проводились при последовательном изменении разности температур между теплообменниками с фиксированной амплитудой и частотой колебаний каретки вибратора либо в случае постоянной амплитуды и разности температур путем изменения частоты вибраций. Для визуализации конвективных течений в рабочую жидкость добавлялись светорассеивающие частицы алюминиевой пудры, которые легко увлекаются потоком. Коэффициент отражения этих частиц сильно зависит от ориентации, что позволяет наблюдать картину движения в целом и траектории отдельных частиц. Так как добавление небольшого количества частиц

в исследуемую жидкость мало меняет ее параметры, их значения в расчетах брались соответствующими чистой жидкости при температуре окружающей среды 20 °С.

Структура течений регистрировалась цифровой видеокамерой. Видеоролики разделялись на кадры и обрабатывались на компьютере с помощью графического редактора “Adobe Photoshop 7.0”. Изображения на кадрах накладывались друг на друга, и полученное изображение представляло собой аналог фотографии с большой выдержкой, на котором хорошо видны треки движущихся частиц.

В качестве рабочей жидкости использовалось трансформаторное масло (ранее с ячейкой данной конфигурации и этой же жидкостью был проведен эксперимент без вибраций). Время установления определенного режима конвекции, оцененное по характерным временам релаксации температурных и гидродинамических возмущений, составляло приблизительно 1,5 ч. В эксперименте время ожидания выхода на стационарный режим составляло не менее двух часов. В ходе эксперимента максимальный перепад температур был равен 35 °С, а частота вибраций 9,2 Гц (перегрузки до 20g).

В качестве определяющих параметров использовались число Прандтля $Pr = \nu/\chi$, а также тепловое и вибрационное числа Рэлея [5] $Ra = g\beta Ad^4/(\nu\chi)$, $Ra_v = (b\Omega\beta Ad^2)^2/(2\nu\chi)$, где g — ускорение свободного падения; A — характерный градиент температуры; d — полутолщина полости; β , ν и χ — соответственно коэффициент теплового расширения, кинематическая вязкость и температуропроводность; b — амплитуда; Ω — круговая частота колебаний. Характерный градиент температуры определялся через высоту полости h и разность температур Θ в верхнем и нижнем теплообменниках ($A = \Theta/h$).

Методика расчетов. В соответствии с приближением Хеле — Шоу два линейных размера ячейки должны быть много больше третьего. В нашем случае предполагается, что $h \gg d$, $l \gg d$ (l — длина ячейки). Ограничения на толщину ячейки позволяют при моделировании конвекции использовать приближение плоских траекторий, согласно которому в жидкости возможны конвективные движения только в плоскости широких граней (x, y) : $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$, $\mathbf{w} = (w_x, w_y, 0)$.

Полость подвергается высокочастотным горизонтальным вибрациям вдоль единичного вектора \mathbf{n} , который ориентирован вдоль широких граней ячейки. Для теоретического описания осредненного конвективного движения в ячейке Хеле — Шоу используются классические уравнения термовибрационной конвекции [6], на основе которых методом Галеркина — Канторовича численно и аналитически производится расчет различных режимов вибрационной конвекции. Система осредненных уравнений, описывающая термовибрационную конвекцию в замкнутой неоднородно нагретой полости, впервые была получена в работе [7] и может быть записана в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{Pr} (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + Ra T \gamma + Ra_v (\mathbf{w}\nabla)(T\mathbf{n} - \mathbf{w}); \quad (1)$$

$$Pr \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla T = \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0; \quad (2)$$

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla T \times \mathbf{n}, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{v} , T , p — осредненные поля скорости, температуры и давления, медленно меняющиеся со временем; \mathbf{w} — дополнительная “медленная” переменная, пропорциональная амплитуде пульсационной компоненты скорости; γ — единичный вектор, направленный вертикально вверх. В уравнения входят три безразмерных параметра: Ra , Ra_v и Pr .

Предполагается, что значение параметра Ra_v , пропорционального произведению малой амплитуды колебаний b на высокую частоту Ω , конечно. В общем случае дополнительным параметром задачи является отношение сторон широких граней l/h , которое в данной работе при проведении расчетов принято равным 1/2.

На твердых границах полости на осредненную составляющую скорости ставятся условия прилипания $\mathbf{v}|_S = 0$, в то время как на амплитуду пульсационной компоненты скорости можно наложить лишь условие непротекания $\mathbf{w}_n|_S = 0$.

Что касается тепловых граничных условий, то далее будет рассматриваться ячейка Хеле — Шоу с теплоизолированными вертикальными гранями, на которых поддерживается постоянный градиент температуры, соответствующий подогреву снизу.

Геометрия задачи позволяет свести трехмерную задачу к плоской, поэтому дальнейший анализ вибрационной конвекции проводится на основе уравнений, записанных в терминах функций тока и температуры:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad w_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w_y = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Здесь $\psi(x, y)$ и $F(x, y)$ — функции тока для векторных полей \mathbf{v} и \mathbf{w} соответственно. Система уравнений (1)–(3) в терминах функций тока имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \Delta \varphi - \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x} + \text{Ra}_v \left(\frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right); \quad (4)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} = \Delta T + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Delta_1 F = -\frac{\partial T}{\partial y}; \quad (5)$$

$$\varphi = -\Delta_1 \psi, \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где φ — вихрь; Δ_1 — плоский оператор Лапласа.

В соответствии с процедурой Галеркина — Канторовича поля функций тока и температуры разлагались по пространственным базисным функциям с амплитудами, зависящими от времени. В качестве базиса использовались тригонометрические функции

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n,m} \psi_{n,m}(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{h} y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right), \\ T &= \sum_{n,m} \theta_{n,m}(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{h} y\right), \\ F &= \sum_{n,m} f_{n,m}(t) \cos\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{h} y\right). \end{aligned}$$

Независимость базисных функций для температуры от поперечной координаты z отвечает условию теплоизоляции широких граней. В случае функции тока для амплитуды пульсационной компоненты скорости отсутствие зависимости от z означает, что на векторное поле \mathbf{w} ставится только условие непротекания.

При проведении расчетов в разложениях функций тока и температуры в ряды учитывались следующие моды:

$$\begin{aligned} &\psi_{11}, \quad \psi_{12}, \quad \psi_{21}, \quad \psi_{22}, \quad \psi_{31}, \\ &\theta_{01}, \quad \theta_{02}, \quad \theta_{11}, \quad \theta_{12}, \quad \theta_{21}, \quad \theta_{22}, \quad \theta_{31}, \\ &f_{01}, \quad f_{02}, \quad f_{11}, \quad f_{12}, \quad f_{21}, \quad f_{22}, \quad f_{31}. \end{aligned}$$

Заметим, что функция тока амплитуды пульсационной компоненты скорости разлагается, как и температура, по семи базисным функциям. Уравнение Пуассона для функции тока амплитуды пульсационной компоненты скорости не является эволюционным. Интегрирование этого уравнения дает систему алгебраических уравнений, которая позволяет

выразить амплитуды функции тока “пульсационного” поля f_{nm} через соответствующие амплитудные коэффициенты поля температуры θ_{nm} . Таким образом, “вибрационная сила” в уравнении Навье — Стокса (4) полностью выражается через амплитуды температурного поля.

После интегрирования с весом уравнений вибрационной конвекции получается система из двенадцати обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд, которая описывает эволюцию возмущений в системе. Эти уравнения ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

Решение линейной задачи устойчивости механического квазиравновесия может быть получено аналитически. Граница устойчивости для различных мод с индексами n и m , которые отвечают за периодичность возмущений вдоль осей x и y соответственно, имеет вид

$$\text{Ra} = \frac{\pi^6 l^2}{8n^2} \left(\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2} \right)^2 \left[\frac{n^2}{l^2} + \frac{m^2}{h^2} + \frac{1}{4} \right] - \text{Ra}_v \frac{n^2 h^2}{n^2 h^2 + m^2 l^2}. \quad (6)$$

Анализ выражения (6) показывает, что для ячейки Хеле — Шоу с соотношением сторон $2 : 20 : 40$ наиболее опасно одновихревое возмущение (мода ψ_{11}). Порог устойчивости, определяемый из линейной теории, согласуется с результатами расчетов “полной” нелинейной системы амплитудных уравнений с точностью до 3 %.

Из полученной системы выделяется замкнутая триплетная подсистема (одна амплитуда для функции тока, две — для температуры), которая отличается от классического триплета Лоренца наличием дополнительного слагаемого, характеризующего осредненное вибрационное воздействие. Это позволяет аналитически построить стационарные решения для разных значений вибрационного и гравитационного чисел Рэлея и числа Прандтля.

Анализ “полной” системы уравнений для амплитуд (пять для функций тока, семь для температуры) был выполнен численно. Система уравнений интегрировалась методом Рунге — Кутты — Фельдберга 4–5-го порядка точности [8] с автоматическим выбором шага; в качестве языка программирования использовался Fortran-90. В результате отслеживалась эволюция системы при разных значениях безразмерных параметров: выход полей функции тока и температуры на стационарные значения, регулярные колебательные и нерегулярные режимы. В ходе расчетов использовался метод установления. Это позволило описать различные типы стационарных течений, колебательные и хаотические режимы вибрационной конвекции. Уточнение метода Рунге — Кутты прекращалось, когда на некотором этапе отличие максимума функции тока от предыдущего значения при установлении того или иного регулярного течения уменьшалось до 1 %.

Обсуждение экспериментальных и теоретических результатов. В ходе большинства экспериментов изучались сценарии перехода к хаосу в зависимости от перепада температур на верхней и нижней границах полости при воздействии вибраций с фиксированными амплитудой и частотой. Теоретическое исследование, описывающее данный эксперимент, представляет собой расчет последовательности конвективных режимов в зависимости от теплового числа Рэлея при фиксированном вибрационном числе Рэлея. Эксперименты и результаты расчетов показывают, что при разных фиксированных значениях вибрационного числа Рэлея в ячейке Хеле — Шоу с соотношением сторон $2 : 20 : 40$ реализуется определенный сценарий перехода от основного состояния к хаосу. При небольших значениях теплового числа Рэлея жидкость находится в основном состоянии, которое называется механическим квазиравновесием. Это состояние характеризуется тем, что в жидкости имеются осцилляции скорости с частотой внешнего воздействия, однако в среднем жидкость неподвижна. Отметим, что состояние механического квазиравновесия в ячейке Хеле — Шоу с рассматриваемым соотношением сторон наблюдается для всех доступных в эксперименте значений вибрационного числа Рэлея. Расчеты показывают (и эксперименты

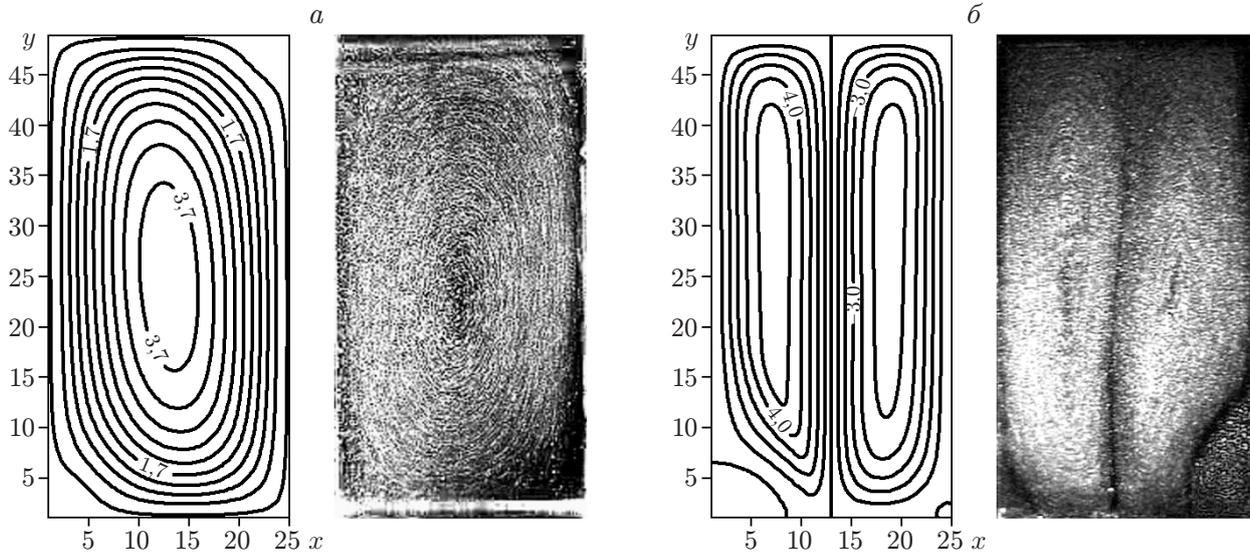


Рис. 3. Стационарные режимы вибрационной конвекции:

a — одновихревое течение; *б* — двухвихревое течение (слева — результаты расчета, справа — экспериментальные данные)

подтверждают), что при увеличении вибрационного числа Рэлея порог устойчивости механического квазиравновесия понижается. С ростом теплового числа Рэлея квазиравновесие теряет устойчивость и при некотором критическом значении этого параметра “мягко” возбуждается стационарное одновихревое течение. На рис. 3, *a* приведены изолинии функции тока, полученные в результате расчета для $Ra = 0,2$, $Ra_v = 0,1$ (слева), и экспериментальные данные при $Ra = 0,9$, $Ra_v = 0,01$ (справа). К сожалению, не удалось провести эксперименты при больших значениях вибрационного числа Рэлея: максимальные частоты соответствуют $Ra_v \approx 0,8$. Однако методика теоретического анализа не накладывает ограничений на значения безразмерных параметров задачи. В ходе расчетов показано, что в случае больших значений вибрационного числа Рэлея возможно “жесткое” возбуждение конвекции.

При дальнейшем увеличении числа Рэлея одновихревое течение сменяется двухвихревым стационарным режимом. На рис. 3, *б* представлены результаты расчетов при $Ra = 0,7$, $Ra_v = 0,1$ и экспериментальные данные при $Ra = 1,66$, $Ra_v = 0,01$. Для анализа надкритических движений строились изолинии осредненных полей функции тока и температуры, а также зависимости максимального значения функции тока от вибрационного числа Рэлея. Расчеты показывают, что в надкритической области увеличение вибрационного воздействия на систему при фиксированном значении числа Рэлея приводит к усилению конвективных движений (явление термовибрационной конвекции). Последующее увеличение числа Рэлея приводит к возникновению хаотического пульсационного режима, который, в свою очередь, при потере устойчивости переходит в регулярный четырехвихревой колебательный режим с перезамыканием вихрей [4, 5].

Пример хаотического пульсационного режима в определенный момент времени показан на рис. 4 (слева — результаты расчета, справа — экспериментальные данные). Видно, что на фоне одновихревого течения в нижнем правом углу полости рождается небольшой вихрь закрутки противоположного направления. Этот вихрь со временем растет и, взаимодействуя с основным течением, в некоторый момент времени поглощается им. Через некоторый промежуток времени данный процесс повторяется. В итоге наблюдаются пуль-

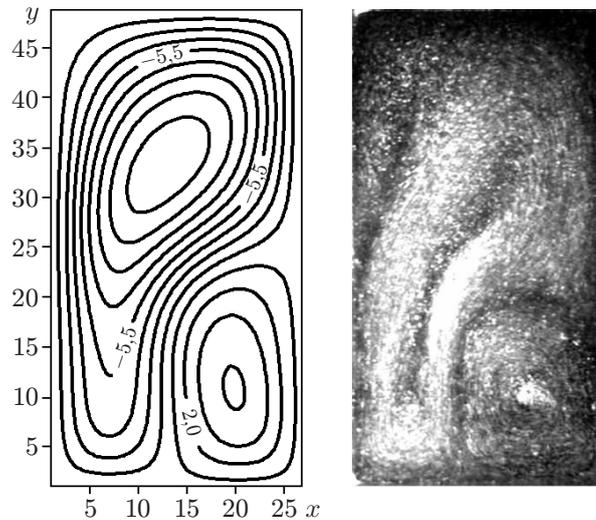


Рис. 4. Пульсационный режим в некоторый момент времени (слева — результаты расчета, справа — экспериментальные данные)

сации нижнего вихря на фоне основного одновихревого течения. По визуальным наблюдениям пульсационные течения являются хаотическими, характерное время пульсаций которых приблизительно равно 1–10 мин в зависимости от перепада температур.

Эксперимент и расчеты дают различные границы соответствующих режимов. В расчетах порог устойчивости механического квазиравновесия, а также границы устойчивости одновихревого, двухвихревого, пульсационного течений и четырехвихревого колебательного режима с перезапуском вихрей значительно ниже экспериментальных. Это объясняется тем, что в расчетах используется условие теплоизолированности широких граней, в то время как в экспериментальной модели широкие грани сделаны из плексигласа, что отвечает промежуточной теплопроводности границ. Следует отметить, что теоретическое исследование [4, 5], выполненное для идеально теплопроводных широких граней, дает совсем другую последовательность конвективных режимов. Настоящие расчеты, выполненные для теплоизолированных широких граней, более реалистично описывают форму и последовательность виброконвективных режимов при увеличении определяющих параметров задачи.

При больших значениях вибрационного числа Рэлея нельзя не учитывать наличие узких боковых граней. В случае слабого вибрационного воздействия ячейка Хеле — Шоу может рассматриваться как полость с неограниченно большими широкими гранями. Только в этом случае в полости возможно состояние механического квазиравновесия. С ростом вибрационного числа Рэлея это приближение перестает быть справедливым. В расчетах влияние узких граней считается пренебрежимо малым, что автоматически накладывает определенные ограничения на значения вибрационного числа Рэлея. Оправданность предположения о неограниченности широких граней полости подтверждается наличием механического квазиравновесия, которое реализуется в эксперименте как основное состояние при малых значениях теплового числа Рэлея.

Выводы. Экспериментально и теоретически исследована термовибрационная конвекция в подогреваемой снизу ячейке Хеле — Шоу при воздействии горизонтальных вибраций, ориентированных вдоль широких граней полости. Определены области существования различных стационарных и нестационарных вибрационно-конвективных режимов. Обнаружены новые устойчивые автоколебательные режимы, которые были названы пуль-

сационными течениями. Результаты численных расчетов согласуются с экспериментальными данными.

Авторы статьи выражают благодарность Г. Ф. Путину (Пермский государственный университет) за поддержку работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Любимов Д. В., Путин Г. Ф., Чернатынский В. И.** О конвективных движениях в ячейке Хеле — Шоу // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 3. С. 554–556.
2. **Путин Г. Ф., Ткачева Е. А.** Экспериментальное исследование надкритических конвективных движений в ячейке Хеле — Шоу // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 1. С. 3–8.
3. **Браверман Л. М.** О вибрационной тепловой конвекции в ячейке Хеле — Шоу // Конвективные течения. Пермь. 1989. С. 73–78.
4. **Демин В. А., Файзрахманова И. С.** Устойчивость вибрационно-конвективных движений в ячейке Хеле — Шоу // Вестн. Перм. ун-та. Сер. Физика. 2003. Вып. 1. С. 108–113.
5. **Demin V. A., Fayzrakhmanova I. S.** On thermovibrational convection in Hele — Shaw cell // Proc. of XXX Summer School APM'2002, St-Petersburg (Repino), Russia, June 27 — July 6, 2002. St-Petersburg: Inst. for Problems in Mech. Engng, 2003. P. 192–196.
6. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.** Устойчивость конвективных течений. М: Наука, 1989.
7. **Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.** О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 51–55.
8. **Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер М.** Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

*Поступила в редакцию 9/XII 2004 г.,
в окончательном варианте — 16/VI 2005 г.*
