Теплофизика и аэромеханика, 2013, том 20, № 3

УДК 536.517

Устойчивость осесимметричных закрученных течений вязкой несжимаемой жидкости*

С.П. Актёршев, П.А. Куйбин

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск

E-mail: sergey-aktershev@mail.ru

Разработан новый метод решения задачи устойчивости закрученного течения вязкой несжимаемой жидкости. Метод, основанный на разложении искомых функций в ряд по степеням радиальной координаты, позволяет избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой. В качестве примера рассмотрена устойчивость течения Пуазейля во вращающейся трубе.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, осесимметричное закрученное течение, устойчивость, метод решения.

Введение

Закрученные потоки широко применяются в технике. Так, в высоконапорных гидротурбинах закрутка потока используется для создания крутящего момента на рабочем колесе и в оптимальном режиме на выходе из рабочего колеса закрутка потока практически отсутствует. В режимах же частичной или форсированной нагрузки значительный уровень закрутки остается в следе за рабочим колесом. Проблемы, возникающие в этом случае, являются общими для различных вихревых аппаратов, применяемых для интенсификации тепломассопереноса или химических реакций, в биореакторах и сепараторах, в вихревых горелках и т.п. С целью интенсификации процессов вихревые аппараты эксплуатируются в условиях высокой степени закрутки потока. В результате, как правило, развиваются неустойчивости, течение становится трехмерным и нестационарным. В частности, могут возникать регулярные пульсации давления на частотах, близких к собственным механическим или акустическим частотам устройств и аппаратов.

Для изучения течений в технологических аппаратах все шире применяются методы вычислительной гидродинамики. Тем не менее, для адекватного описания крайне актуально получение априорной информации о возможных неустойчивостях течения. В то же время их анализ позволяет без проведения дорогостоящих и длительных расчетов предсказать диапазоны наиболее неустойчивых частот (длин волн), а также зоны режимных характеристик, в которых течение неустойчиво. При линейном анализе неустойчивости закрученных течений уравнения Навье–Стокса линеаризуют и рассматривают экспоненциально растущие (убывающие) возмущения в пространственной или временно́й постановке.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 10-08-01096-а) и Министерства образования и науки РФ в рамках реализации ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2013 годы» (ГК № 11.519.11.6022).

Задача сводится к поиску собственных частот (длин волн) и соответствующих собственных функций различных мод колебаний. Кроме стандартных трудностей решения задач гидродинамической неустойчивости, связанных с наличием малого коэффициента при старшей производной (при больших числах Рейнольдса) и возможностью бифуркаций, в случае закрученного потока возникает дополнительная сложность, заключающаяся в наличии особой точки на оси течения (а в случае с безграничным течением еще одной особой точки — на бесконечном удалении от оси). Вблизи особых точек собственные функции различных мод оказываются близкими друг к другу и при численном интегрировании возможно «перепрыгивание» с одной моды на другую. Для обхода этих препятствий вблизи особых точек строятся асимптотические решения по методу Фробениуса (см., например, [1]), что позволяет перенести граничные условия в некоторые регулярные точки, и дополнительно применяется процедура ортогонализации для разделения линейно независимых решений.

Настоящая работа посвящена построению нового метода решения задачи устойчивости закрученного течения вязкой несжимаемой жидкости, основанного на разложении искомых функций в ряд по степеням радиальной координаты. Этот метод позволяет избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой.

Линейный анализ устойчивости ограниченного течения

Для осесимметричного закрученного течения несжимаемой жидкости в трубе компоненты вектора скорости в цилиндрических координатах будут: $V_z = U(r)$, $V_r = 0$, $V_\varphi = W(r)$. Возьмем в качестве линейного масштаба радиус трубы R, масштаба скорости — скорость на оси трубы U_0, масштаба времени — R/U_0 и перейдем к безразмерным переменным, сохраняя для всех физических величин традиционные буквенные обозначения. Рассмотрим малые возмущения компонент скорости и давления в виде бегущей волны

$$\left\{\overline{V}_z, \overline{V}_r, \overline{V}_\varphi, \overline{p}\right\} = \left\{F, iS, H, P\right\} \exp\left(i(\alpha z + n\varphi - \alpha c t)\right). \tag{1}$$

Выражение (1) описывает периодические по координатам z и φ возмущения, растущие или затухающие во времени. Здесь i — мнимая единица, α – вещественное волновое число, n — азимутальное волновое число ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), $c = c_r + ic_i$ — комплексная скорость распространения возмущения, $F(r)$, $S(r)$, $H(r)$, $P(r)$ — комплексные амплитудные функции. Положительные значения n соответствуют распространению волны в направлении закрутки, отрицательные — в противоположном направлении. Величина αc_i дает временной инкремент, αc_r — частоту колебаний. Положительные значения инкремента соответствуют растущим возмущениям.

Подстановка (1) в линеаризованные уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности приводит к системе дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rS')' - (n^2+1)S - 2nH\right) = r^2\left(\gamma + \alpha^2 / i\,\mathrm{Re}\right)S + 2rHW - r^2P', \tag{2}$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rH')' - (n^2+1)H - 2nS\right) = \left(\gamma + \alpha^2 / i\,\mathrm{Re}\right)r^2H + (W' + W/r)r^2S + rnP, \tag{3}$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\left(r(rF')' - n^2F\right) = \left(\gamma + \alpha^2 / i\,\mathrm{Re}\right)r^2F + \alpha r^2P + r^2SU', \tag{4}$$

$$\alpha rF + (rS)' + nH = 0. \tag{5}$$

Здесь штрих означает производную по r, $\mathrm{Re} = U_0R/\nu$ — число Рейнольдса, $\gamma = \alpha(U - c) + nW/r$. Граничные условия таковы. На оси трубы: при $n = 0$ $F(0)$ и $P(0)$ ограничены, $S(0) = H(0) = 0$; при $n = \pm 1$ $F(0) = P(0) = 0,$ $S(0) \pm H(0) = 0;$ при $|n| > 1$ $F(0) = P(0) = S(0) = H(0) = 0.$ На стенке: $S(1) = H(1) = F(1) = 0.$

Решение уравнений (2)–(5) с указанными граничными условиями существует только для определенных значений комплексной скорости (задача на собственные значения).

Перейдем к переменным $\psi = (S + H)/2$ и $\theta = (S - H)/2.$ В новых переменных система (2)–(5) примет вид

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\Big(r(r\psi')' - (n+1)^2\psi\Big) = \left(\gamma + \frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}} + \beta_1\right)r^2\psi + \beta_2 r^2\theta + \frac{1}{2}\Big(rnP - r^2P'\Big), \tag{6}$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\Big(r(r\theta')' - (n-1)^2\theta\Big) = \left(\gamma + \frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}} - \beta_1\right)r^2\theta - \beta_2 r^2\psi - \frac{1}{2}\Big(rnP + r^2P'\Big), \tag{7}$$

$$\frac{1}{i\,\mathrm{Re}}\Big(r(rF')' - n^2F\Big) = \left(\gamma + \frac{\alpha^2}{i\,\mathrm{Re}}\right)r^2F + \alpha r^2P + r^2U'\big(\psi + \theta\big), \tag{8}$$

$$r\theta' + r\psi' + (n+1)\psi - (n-1)\theta = -\alpha rF. \tag{9}$$

Здесь введены обозначения $\beta_1(r) = 0{,}5\big(W' + 3W/r\big),$ $\beta_2(r) = 0{,}5\big(W' - W/r\big).$ Граничные условия для ψ и θ таковы. На оси трубы: при $n = 0$ $\psi(0) = \theta(0) = 0;$ при $n = 1$ $\psi(0) = 0,$ $\theta(0) = S(0);$ при $n = -1$ $\psi(0) = S(0),$ $\theta(0) = 0;$ при $|n| > 1$ $\psi(0) = \theta(0) = 0.$ На стенке: $\psi(1) = \theta(1) = F(1) = 0.$ Отметим, что в отличие от уравнений (2)–(5), система (6)–(9) обладает свойством симметрии, в частности, система уравнений инвариантна относительно замены $n \to -n,$ $\psi \to \theta,$ $\theta \to \psi,$ $\beta_1 \to -\beta_1,$ $\beta_2 \to -\beta_2.$

Устойчивость течения Пуазейля во вращающейся трубе

В качестве примера рассмотрим течение во вращающейся трубе с распределением осевой скорости в виде профиля Пуазейля $U = 1 - r^2$ и азимутальной скоростью, распределенной по закону твердотельного вращения $W = qr.$ Здесь $q = \Omega R/U_0$ — параметр закрутки, Ω — угловая скорость вращения трубы.

Известно, что рассматриваемое закрученное течение в отличие от классического течения Пуазейля является неустойчивым по отношению к неосесимметричным возмущениям. Впервые этот факт был обнаружен в работах [2, 3] асимптотическими методами, позднее это было подтверждено численными методами [4–6]. В зависимости от определяющих параметров задачи (числа Рейнольдса и параметра закрутки) в потоке может одновременно наблюдаться несколько мод неустойчивости. Так же как и для течений типа свободного вихря, наиболее нарастающей оказалась мода $n = -1$. В работе [5] построены кривые нейтральной устойчивости, определены критические значения чисел Рейнольдса и параметра закрутки, проведено сравнение с экспериментами. Детальное исследование данной проблемы проведено в работе [1] исходя из численного интегрирования уравнений (2)–(5). Расчет [1] состоял из нескольких этапов. Вблизи особой точки $r = 0$ строились асимптотические решения по методу Фробениуса, что позволяло перенести граничные условия в точку $r = r_a > 0.$ На интервале $r_a \le r \le 1$ решения продолжались численным интегрированием. Подбором собственных значений c_r, c_i посредством итерационной процедуры добивалось выполнение граничных условий $S(1) = H(1) = F(1) = 0.$ Система (2)–(5) представлялась в виде шести дифференциальных уравнений первого порядка и численно интегрировалась методом Кутта–Мерсона. Принципиальная трудность в реализации этого метода заключается в быстром (паразитическом) росте одного или нескольких решений при численном интегрировании, в результате чего теряется их линейная независимость. Для обхода этих трудностей на каждом шаге интегрирования применялась процедура ортогонализации линейно независимых решений.

Решение задачи методом разложения в степенной ряд

Рассмотрим метод решения системы уравнений (6)–(9), не использующий численное интегрирование и позволяющий избежать связанных с этим трудностей. Для течения Пуазейля во вращающейся трубе $\gamma = \alpha(1-c) + nq - \alpha r^2$, $\beta_1(r) = 2q$, $\beta_2(r) = 0$, поэтому выражения в первых скобках в правой части уравнений (6) и (7) можно записать в виде

$$\left(\gamma + \alpha^2 / i\,\mathrm{Re} + \beta_1\right) = \alpha(1-c) + nq + \alpha^2 / i\,\mathrm{Re} - \alpha r^2 + 2q,$$

$$\left(\gamma + \alpha^2 / i\,\mathrm{Re} - \beta_1\right) = \alpha(1-c) + nq + \alpha^2 / i\,\mathrm{Re} - \alpha r^2 - 2q.$$

Введем замены: $\psi = i\,\mathrm{Re}\tilde{\psi}$, $\theta = i\,\mathrm{Re}\tilde{\theta}$, $F = i\,\mathrm{Re}^2 \tilde{F}$, $\alpha = \tilde{\alpha}/\mathrm{Re}$, $q = \tilde{q}/\mathrm{Re}$. Такое масштабирование вызвано необходимостью рассматривать большие значения числа Рейнольдса. Известно, что при $\mathrm{Re} \to \infty$ волновое число растущих возмущений порядка 1/Re, поэтому $\tilde{\alpha} \sim 1$. Для переменных с тильдой уравнения (6)–(9) принимают вид

$$r(r\tilde{\psi}')' - (n+1)^2 \tilde{\psi} = \left(b + 2i\tilde{q} - i\tilde{\alpha} r^2\right) r^2 \tilde{\psi} + \left(rnP - r^2 P'\right)/2, \tag{10}$$

$$r(r\tilde{\theta}')' - (n-1)^2 \tilde{\theta} = \left(b - 2i\tilde{q} - i\tilde{\alpha} r^2\right) r^2 \tilde{\theta} - \left(rnP + r^2 P'\right)/2, \tag{11}$$

$$r(r\tilde{F}')' - n^2 \tilde{F} = \left(b - i\tilde{\alpha} r^2\right) r^2 \tilde{F} + r^2 P \tilde{\alpha} / \mathrm{Re}^2 - 2ir^3(\tilde{\psi} + \tilde{\theta}), \tag{12}$$

$$r\tilde{\theta}' + r\tilde{\psi}' + (n+1)\tilde{\psi} - (n-1)\tilde{\theta} = -\tilde{\alpha} r \tilde{F}. \tag{13}$$

Здесь введено обозначение: $b = i\left(\tilde{\alpha} + n\tilde{q} - \tilde{\alpha} c_r\right) + \tilde{\alpha} c_i + \tilde{\alpha}^2 / \mathrm{Re}^2$.

Разложим искомые функции $\tilde{\psi}(r)$, $\tilde{\theta}(r)$, $\tilde{F}(r)$, $P(r)$ в ряд по степеням переменной r, представив их в виде:

$$\tilde{\psi} = \psi_0 r^k + \psi_1 r^{k+2} + \psi_2 r^{k+4} + \ldots + \psi_m r^{k+2m}, \quad \tilde{\theta} = \theta_0 r^k + \theta_1 r^{k+2} + \theta_2 r^{k+4} + \ldots + \theta_m r^{k+2m}, \tag{14}$$

$$\tilde{F} = f_1 r^{k+1} + f_2 r^{k+3} + \ldots + f_m r^{k+2m-1}, \quad P = p_1 r^{k+1} + p_2 r^{k+3} + \ldots + p_m r^{k+2m-1}. \tag{15}$$

Для функций $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\theta}$ ряд начинается со степени $k = |n| - 1$, а для функций $\tilde{F}$ и P степень на единицу больше. При k = 0 коэффициенты ψ_0 и θ_0 дают значениям $\psi(0)$ и $\theta(0)$, а при $|n| > 1$ выполняются граничные условия $F(0) = P(0) = \psi(0) = \theta(0) = 0$. В дальнейшем будем рассматривать только отрицательные моды ($n < 0$), поскольку только они дают неустойчивость. Подставляя ряды (14), (15) в уравнения (10)–(13) и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями r в обеих частях, получаем для коэффициентов ряда рекуррентные соотношения:

$$\left((k+2m)^2 - k^2\right)\psi_m = \left(b + 2i\tilde{q}\right)\psi_{m-1} - i\tilde{\alpha}\psi_{m-2} - p_m\left(k+m\right), \tag{16}$$

$$\left((k+2m)^2 - (k+2)^2\right)\theta_m = \left(b - 2i\tilde{q}\right)\theta_{m-1} - i\tilde{\alpha}\theta_{m-2} - p_m\left(m-1\right), \tag{17}$$

$$\left((k+2m-1)^2 - (k+1)^2\right) f_m = b f_{m-1} - i\tilde{\alpha} f_{m-2} + p_{m-1}\tilde{\alpha}/\mathrm{Re}^2 - 2i\left(\psi_{m-2} + \theta_{m-2}\right), \tag{18}$$

$$2\left(m + k + 1\right)\theta_m + 2m\psi_m = -\tilde{\alpha} f_m. \tag{19}$$

Эти соотношения, выполняющиеся при $m = 0, 1, 2\ldots,$ позволяют выразить коэффициенты рядов с номером m через предыдущие коэффициенты с номерами m–1 и m–2. Если будут известны «стартовые» коэффициенты с номерами 0 и 1, то остальные вычисляются из рекуррентных соотношений, тем самым будут найдены все искомые функции. Соотношения (16)–(19) нетрудно разрешить относительно ψ_m, θ_m, p_m, f_m. После некоторых преобразований получаем

$$f_m = \frac{bf_{m-1} - i\tilde{\alpha} f_{m-2} + p_{m-1}\tilde{\alpha} / \mathrm{Re}^2 - 2i\left(\psi_{m-2} + \theta_{m-2}\right)}{4(m+k)(m-1)}, \tag{20}$$

$$p_m = \frac{4i\tilde{q}E_{m-1} - 2i\tilde{\alpha}\left(m\psi_{m-2} + (m+k+1)\theta_{m-2} + \tilde{\alpha} f_{m-2}/2\right) + p_{m-1}\tilde{\alpha}^2 / \mathrm{Re}^2}{4(m+k)(m-1)}, \tag{21}$$

$$\theta_m = -\frac{E_m + \tilde{\alpha} f_m / 2}{2(m+k+1)}, \quad \psi_m = \frac{E_m - \tilde{\alpha} f_m / 2}{2m}, \tag{22}$$

$$E_m = \frac{bE_{m-1} - i\tilde{\alpha}\left(\tilde{q} f_{m-1} + (m-1)\psi_{m-2} - (m+k)\theta_{m-2}\right)}{4(k+m)(m-1)}. \tag{23}$$

Здесь введено обозначение $E_m = m\psi_m - (m+k+1)\theta_m$.

Из (20)–(22) следует, что $\theta_0 = 0,$ а коэффициенты $p_1, f_1,\ \psi_0$ не определены. Таким образом, $p_1, f_1,\ \psi_0$ являются «стартовыми» коэффициентами, из которых вычисляются все остальные. В частности, для коэффициентов с номером 1 из соотношения (16) находим $\psi_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{b+2i\tilde{q}}{k+1}\psi_0 - p_1\right),$ из (19) находим $\theta_1 = -\frac{\psi_1 + \tilde{\alpha} f_1/2}{k+2} = \frac{1}{4(k+2)}\left(p_1 - \frac{b+2i\tilde{q}}{k+1}\psi_0 - 2\tilde{\alpha} f_1\right)$. Отсюда $E_1 = \psi_1 - (k+2)\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b+2i\tilde{q}}{k+1}\psi_0 + \tilde{\alpha} f_1 - p_1\right)$.

Значения «стартовых» коэффициентов вычисляются из граничных условий на стенке. Зададим достаточно большое число членов ряда N. Подставляя $r = 1$ в (14), (15), получаем

$$\tilde{\theta}(1) = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_N, \quad \tilde{F}(1) = f_1 + f_2 + \ldots + f_N.$$

Отсюда следует, что $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$ определяются «стартовыми» коэффициентами. Поскольку рекуррентные соотношения линейны, значения $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$ являются линейными функциями «стартовых» коэффициентов, т. е. их можно представить в виде

$$\tilde{F}(1) = A_1 p_1 + B_1 f_1 + D_1\psi_0, \quad \tilde{\theta}(1) = A_2 p_1 + B_2 f_1 + D_2\psi_0.$$

Неизвестные константы $A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2$ найдем следующим образом. Зададим $\left(p_1, f_1, \psi_0\right) = \left(0,0,1\right)$ и по рекуррентным формулам вычислим остальные коэффициенты рядов (14), (15). Тем самым мы получим значения $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$, которые равны, соответственно, D_1 и D_2. Если задать $\left(p_1, f_1, \psi_0\right) = \left(1,0,0\right)$, то вычисленные значения $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$ равны A_1 и A_2. При $\left(p_1, f_1, \psi_0\right) = \left(0,1,0\right)$ значения $\tilde{F}(1)$ и $\tilde{\theta}(1)$ равны B_1 и B_2.

Граничные условия $\tilde{F}(1) = \tilde{\theta}(1) = 0$ приводят к системе линейных уравнений

$$A_1 p_1 + B_1 f_1 + D_1\psi_0 = 0, \quad A_2 p_1 + B_2 f_1 + D_2\psi_0 = 0. \tag{24}$$

Поскольку искомые функции $\tilde{\psi}(r)$, $\tilde{\theta}(r)$, $\tilde{F}(r)$, $P(r)$ определены с точностью до произвольного множителя, значение ψ_0 можно положить произвольной константой. Таким образом, из (24) находим

$$p_1 = \psi_0 \left(D_2 B_1 - D_1 B_2 \right) / \left(A_1 B_2 - A_2 B_1 \right), \qquad f_1 = \psi_0 \left(A_2 D_1 - A_1 D_2 \right) / \left(A_1 B_2 - A_2 B_1 \right).$$

Остается выполнить последнее граничное условие на стенке

$$\tilde{\psi}(1) = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_N = 0. \tag{25}$$

Условие (25) служит для вычисления собственного значения комплексной скорости, которая входит в уравнения (16)–(18) только через комплексную величину $b = x + iy$, где $x = \tilde{\alpha} c_i + \tilde{\alpha}^2 / \mathrm{Re}^2$ и $y = \tilde{\alpha} + n\tilde{q} - \tilde{\alpha} c_r$ вещественная и мнимая части b. Уравнение (25) равносильно двум уравнениям

$$G_R(x, y) = 0, \quad G_I(x, y) = 0, \tag{26}$$

где G_R и G_I — вещественная и мнимая части $\tilde{\psi}(1)$.

Система уравнений (26) решалась итерациями методом Ньютона–Рафсона. Пусть известно некоторое приближение (x_n, y_n) и, соответственно, значения G_R^n, G_I^n. Разлагая $G_R(x, y)$, $G_I(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_n, y_n) с точностью до линейных членов, запишем

$$G_R^n + \frac{\partial G_R}{\partial x}\left(x_{n+1} - x_n \right) + \frac{\partial G_R}{\partial y}\left(y_{n+1} - y_n \right) = 0,$$

$$G_I^n + \frac{\partial G_I}{\partial x}\left(x_{n+1} - x_n \right) + \frac{\partial G_I}{\partial y}\left(y_{n+1} - y_n \right) = 0. \tag{27}$$

Отсюда получаем следующее приближение x_{n+1}, y_{n+1}. Частные производные в (27) заменялись конечными разностями с помощью заданных малых приращений Δx, Δy, и вычисленных приращений ΔG_R, ΔG_I. Итерации прекращались после достижения условий $\left| x_{n+1} - x_n \right| < \varepsilon$, $\left| y_{n+1} - y_n \right| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-8}$.

Результаты расчетов

Тестовые расчеты показали, что 35–40 членов ряда Тейлора вполне достаточно для аппроксимации искомых функций. Увеличение количества членов ряда до $N = 75$ приводит к изменению вычисленных значений фазовой скорости только в шестом десятичном знаке. На рис. 1 показана зависимость модуля коэффициента ряда Тейлора θ_m от номера m. Наибольший вклад в сумму ряда дают члены с номером $m < 6$, а коэффициенты с номерами $m > 45$ более чем на сто порядков меньше.

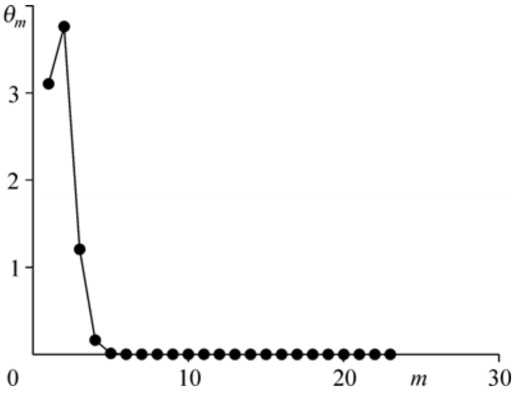

Рис. 1. Зависимость модуля коэффициента ряда θ_m от номера m.

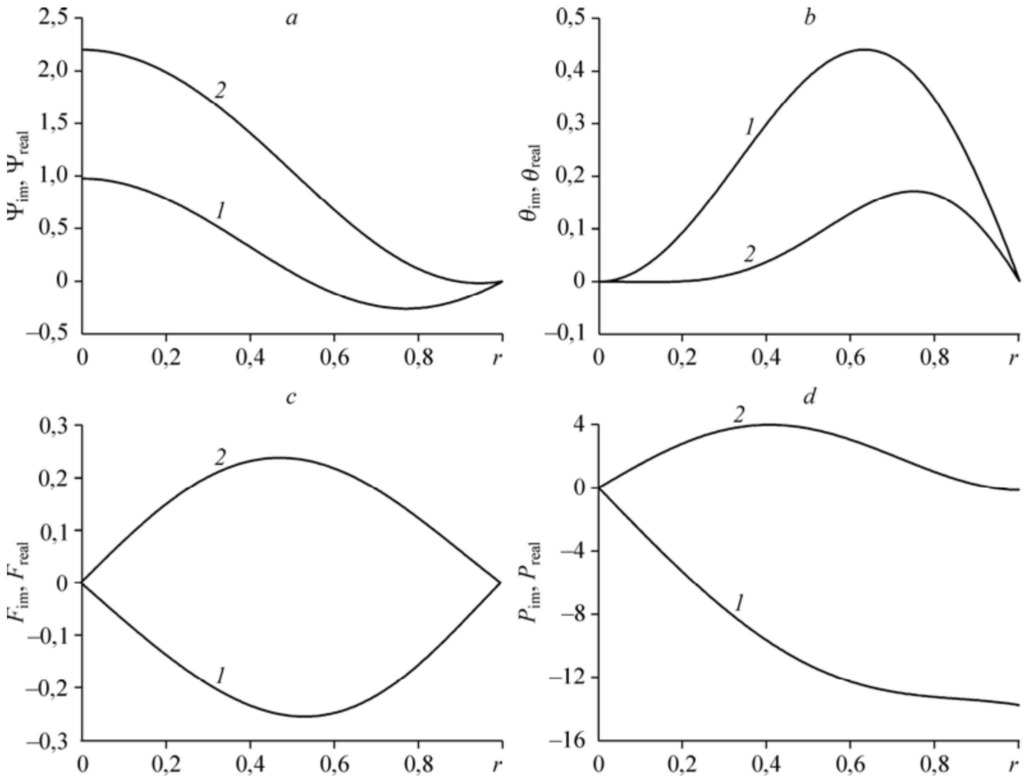

Рис. 2. Вещественные и мнимые части амплитудных функций $\tilde\psi(r)$, $\tilde\theta(r)$, $\tilde F(r)$, $P(r)$ при Re = 200, α = 0,007, q = 0,4.

a: *1* — $\psi_{\rm real}$, *2* — $\psi_{\rm im}\times 10$, *b*: *1* — $\theta_{\rm real}$, *2* — $\theta_{\rm im}\times 10$, *c*: *1* — $F_{\rm real}$, *2* — $F_{\rm im}\times 20$, *d*: *1* — $P_{\rm real}$, *2* — $P_{\rm im}$, × 0,1.

На рис. 2–5 приведены результаты расчетов для моды $n = -1$. На рис. 2 показаны зависимости $\tilde\psi(r)$, $\tilde\theta(r)$, $\tilde F(r)$, $P(r)$, рассчитанные для Re = 200, α = 0,007, q = 0,4. Рисунок 3 иллюстрирует зависимости инкремента и частоты колебаний от волнового числа при Re = 200 для различных значений параметра закрутки q. При q < 0,1 для любых значений волнового числа инкремент отрицательный; при увеличении параметра закрутки появляется диапазон волнового числа, в котором инкремент положительный (область неустойчивости). По мере роста q область неустойчивости расширяется, а максимальное значение инкремента растет. При q > 1 максимум инкремента увеличивается незначительно, а область неустойчивости существенно сужается и при q = 2 наблюдается только в диапазоне $0{,}03 < \alpha < 0{,}5$. Длина волны максимально нарастающих колебаний значительно увеличивается. Фазовая скорость волн максимального роста при малых q положительная, но очень мала, а при q > 1 фазовая скорость растущих возмущений отрицательная. Кривые нейтральной устойчивости для различных значений параметра закрутки представлены на рис. 4 в координатах (α, Re). Для любого фиксированного значения q область неустойчивости существует при Re > $\mathrm{Re}_{\rm cr}$. При малых q значение $\mathrm{Re}_{\rm cr}$ велико и монотонно уменьшается с ростом параметра закрутки ($\mathrm{Re}_{\rm cr} \approx 27/q$). В диапазоне $1 < q < 10$ критическое число Рейнольдса меняется слабо — $\mathrm{Re}_{\rm cr} \approx 83\div85$. В пределе $q \to \infty$ расчетное значение критического числа Рейнольдса составляет 82,9201, что полностью соответствует полученному ранее в работах [1, 5, 6] значению $\mathrm{Re}_{\rm cr}$ = 82,92. Расчетная граница области устойчивости показана на рис. 5 (область неустойчивости

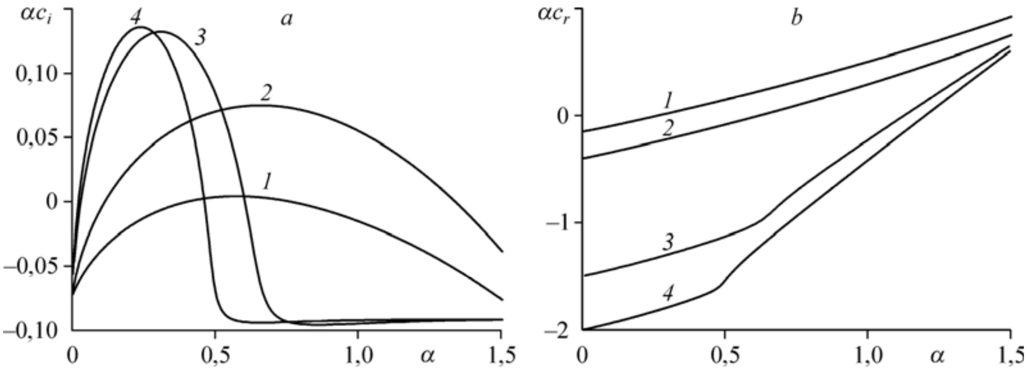

Рис. 3. Зависимости инкремента (*a*) и частоты колебаний (*b*) от волнового числа при Re = 200 для различных значений параметра закрутки *q*.

1 — 0,15, *2* — 0,4, *3* — 1,5, *4* — 2.

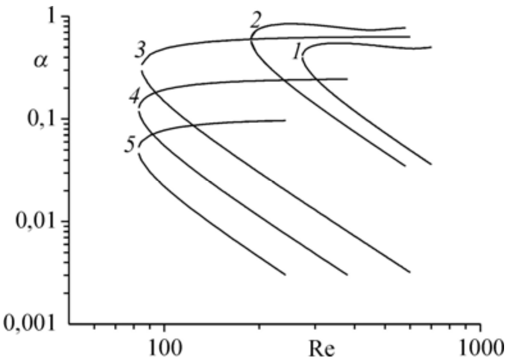

Рис. 4. Нейтральные кривые для различных значений параметра закрутки *q*.

1 — 0,1, *2* — 0,15, *3* — 1,5, *4* — 4, *5* — 10.

лежит выше кривой). В таблице приведены расчетные значения $\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ при различных значениях q и соответствующие им волновые числа в сравнении с расчетами [1].

Как видим, новый метод дает хорошее совпадение с результатами расчета [1], полученными численным интегрированием уравнений (2)–(5).

Отметим, что примененный метод разложения искомых функций в ряд пригоден не только для течения Пуазейля во вращающейся трубе, но и для других течений с закруткой, например, для вихря Бэтчелора с профилями осевой и азимутальной скорости $U = \exp(-\alpha r^2)$, $W = \dfrac{q}{r}\left(1 - \exp(-\alpha r^2)\right)$. Здесь параметр α определяет размер вихря. Если разложить экспоненту в ряд, то компоненты скорости представляются в виде степенного ряда по переменной r:

$$U = 1 - \alpha r^2 + \frac{\alpha^2 r^4}{2} + \ldots,$$

$$W = q\left(\alpha r - \frac{\alpha^2 r^3}{2} + \frac{\alpha^3 r^5}{6} + \ldots\right). \tag{28}$$

Таблица

q		0,01	0,02	0,06	0,1	0,2	0,6	1	10
$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$	настоящая работа	2696,47	1348,74	451,15	273,54	150,16	93,442	86,925	82,93
	данные работы [1]	2696,06	1347,82	450,97	273,57	150,14	93,44	86,92	82,92
α	настоящая работа	0,0396	0,079	0,241	0,405	0,716	0,635	0,448	0,049
	данные работы [1]	0,04	0,079	0,241	0,404	0,716	0,634	0,447	0,05

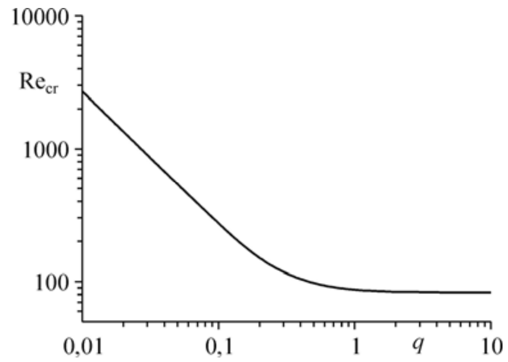

Рис. 5. Граница области неустойчивости.

Так же, как и в случае течения Пуазейля, для осевой скорости присутствуют только четные, а для азимутальной скорости — только нечетные степени r. Подставляя (28) в уравнения (6)–(9), снова приходим к разложениям искомых функций в ряд по степеням r. Рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда будут в этом случае более громоздкими (каждый коэффициент выражается через все предыдущие коэффициенты), но ход решения будет тот же самый.

Разработанный метод применим к течениям, для которых осевую и азимутальную скорости можно разложить в ряд по четным (нечетным) степеням радиальной координаты.

Выводы

Разработан новый метод решения задачи устойчивости закрученного течения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале. Метод основан на разложении искомых функций в ряд по степеням радиальной координаты. Алгоритм решения сводится к итерационной процедуре, в которой коэффициенты ряда вычисляются из системы линейных алгебраических уравнений. Тем самым в задаче на собственные значения удается избежать трудностей, связанных с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений с особой точкой. В качестве примера рассмотрена устойчивость течения Пуазейля во вращающейся трубе. Новый метод дает хорошее совпадение с расчетами на основе численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Список обозначений

$c = c_r + ic_i$ — комплексная скорость распространения возмущений,
F — амплитуда возмущения аксиальной компоненты скорости,
H — амплитуда возмущения азимутальной компоненты скорости,
n — азимутальное волновое число (целое),
iS — амплитуда возмущения радиальной компоненты скорости,
P — амплитуда возмущения давления,
$q = \Omega R/U_0$ — параметр закрутки,
R — радиус трубы,
U — аксиальная скорость,
W — азимутальная скорость,
r, z, φ — цилиндрические координаты,
Ω — угловая скорость вращения трубы.

Греческие символы

α — вещественное волновое число,
$\psi = (S + H)/2$, $\theta = (S - H)/2$,
$\beta_1 = 0{,}5(W' + 3W/r)$, $\beta_2 = 0{,}5(W' - W/r)$.

Безразмерные комплексы

$\mathrm{Re} = U_0R/\nu$ — число Рейнольдса.

Индексы

m — номер коэффициента ряда.

Список литературы

1. **Ахметов В.К., Шкадов В.Я.** Численное моделирование вязких вихревых течений для технических приложений. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. 176 с.
2. **Pedley T.J.** On the instability of rapidly rotating shear flows to nonaxisymmetric disturbances // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 31. P. 603–607.
3. **Pedley T.J.** On the instability of viscous flow in a rapidly rotating pipe // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 35. P. 97–115.
4. **Maslowe S.A.** Instability of rigidly rotating flows to non-axisymmetric disturbances // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 64. P. 307–317.
5. **Mackrodt P.A.** Stability of Hagen-Poiseuille flow with superimposed rigid rotation // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 73, No. 1. P. 153–164.
6. **Fernandez-Feria R., Pino C.** The onset of absolute instability of rotating Hagen-Poiseuille flow: A spatial stability analysis // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. P. 3087–3097.

Статья поступила в редакцию 3 июля 2012 г.,
после доработки — 3 октября 2012 г.