

УДК 539.74375

ОБРАЗОВАНИЕ ЗОНЫ КОНТАКТА ПРИ СЖАТИИ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

М. Е. Кожевникова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: kozhevnikova@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача о сжатии тонкой пластины с эллиптическим отверстием. Предполагается, что увеличение удаленной сжимающей нагрузки может привести к контакту противоположных участков границы эллипса. Задача решается в рамках модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла и упругопластического аналога задачи Гриффитса для эллипса с использованием модели Гудьера и Каннинена. Критические параметры разрушения, обеспечивающие равновесную конфигурацию системы, определяются из достаточного критерия прочности, представляющего собой систему двух уравнений, одно из которых является условием, исключающим частичное наложение верхней и нижней поверхностей зоны контакта, другое — деформационным критерием критического раскрытия эллипса. На примере отожженной меди, имеющей наноструктуру, показано деформирование границ эллипсов с различными радиусами кривизны в вершине при сжатии.

Ключевые слова: эллипс, зона контакта, зона предразрушения, модифицированная модель Леонова — Панасюка — Дагдейла, упругопластический аналог задачи Гриффитса, модель Гудьера и Каннинена, критические параметры разрушения.

ВВЕДЕНИЕ

Сжатие тонкой пластины из упругопластического материала с эллиптическим отверстием однородными напряжениями на бесконечности, приложенными перпендикулярно большей оси отверстия, приводит к изменению его геометрической формы. В процессе сжатия перед вершинами эллипса образуются пластические зоны. Действие внешних напряжений может вызвать контакт противоположных поверхностей эллипса. В работе [1] предполагается наличие зоны контакта у трещины с закругленными концами при сжатии пластины из упругопластического материала.

Рассмотрим модель, в которой область контакта представляет собой область взаимодействия двух слоев атомов, расположенных симметрично относительно большей оси деформированного эллипса. Начальная стадия процесса сближения характеризуется возникновением силы притяжения для атомной пары в центре деформированного эллипса. Увеличение удаленных сжимающих сил приводит к увеличению количества атомных пар, сближающихся по обе стороны от центра. В процессе взаимодействия каждой атомной пары, за исключением двух пар, расположенных на концах области контакта, имеют место стадии притяжения, равновесия и отталкивания. Согласно закону Гука [2] сила атомного отталкивания возрастает пропорционально величине сближения атомных слоев. При

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00163) и в рамках программы Президиума РАН (код проекта 11.16).

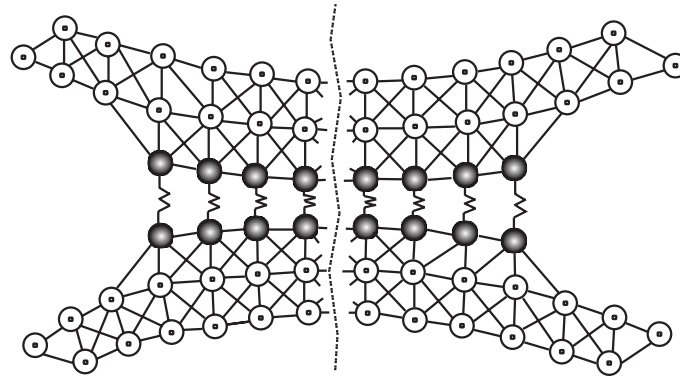


Рис. 1. Зона контакта деформированного эллиптического отверстия при сжатии пластины

дальнейшем сближении эта сила достигает максимума в центре деформированного эллипса. При приближении к концам области контакта сила атомного притяжения уменьшается до нуля. Связь между силой атомного притяжения и величиной сближения атомных плоскостей является нелинейной. Для того чтобы избежать решения нелинейной задачи, используем модель Гудьера и Каннинена для случая растяжения [2]. Рассмотрим модификацию этой модели для случая сжатия. В модифицированной модели Гудьера и Каннинена для случая сжатия два слоя атомов, образующих область контакта, разделяют пластину на две половины. Материал выше и ниже области контакта полагается линейно-упругим. Схема сближения атомных слоев показана на рис. 1. Атомы двух слоев, находящихся в процессе сближения, заштрихованы. Прямые и ломаные линии (пружины), соединяющие атомы, соответствуют линейному и нелинейному законам взаимодействия атомов. Для простоты в модель включены только прямые связи. Таким образом, на рис. 1 область контакта представлена как область взаимодействия двух слоев атомов. Учитывая сложный характер взаимодействия атомных слоев, далее будем полагать, что сила взаимодействия атомных пар зависит от величины их сближения и подчиняется синусоидальному, степенному (с отрицательной степенью) или линейному закону [2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Тонкая пластина с эллиптическим отверстием сжимается на бесконечности однородными напряжениями σ_∞ , действующими по нормали к большей оси эллипса длиной $2l_0$, расположенной вдоль оси Oy_1 (рис. 2). Начало системы координат Ox_1y_1 ($x_1 = x/l_0$, $y_1 = y/l_0$) находится в центре эллипса. Сжатие пластины приводит к образованию пластических зон в окрестностях вершин эллипса. Предполагается, что увеличение удаленной сжимающей нагрузки может привести к контакту противоположных участков границы эллипса. Пусть $2d$ — длина зоны контакта. При этом наличие пластических зон исключает полное смыкание противоположных участков границы деформированного эллипса, когда $d = l_0$.

Найдем критические параметры разрушения: критическое значение внешних сжимающих напряжений σ_∞^* , критические длины зоны контакта $2d^*$ и зоны предразрушения Δ^* , при которых пластина с деформированным эллипсом будет находиться в подвижно-равновесном состоянии при условии отсутствия частичного наложения поверхностей в зоне контакта.

Для решения поставленной задачи используем модифицированную модель Леонова — Панасюка — Дагдейла и упругопластический аналог задачи Гриффитса [3]. В рамках

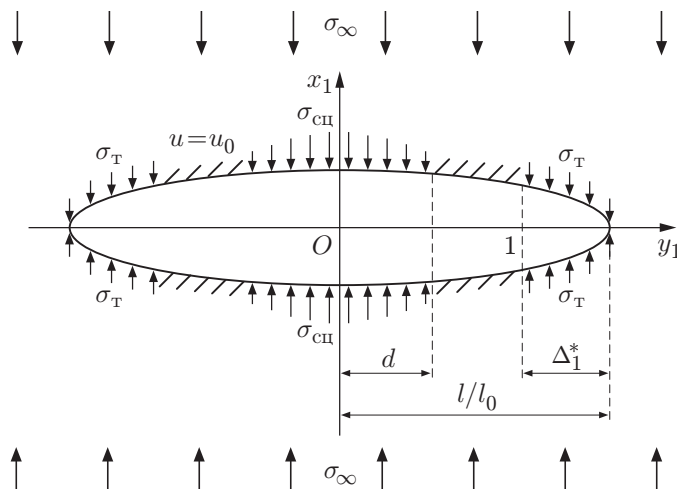


Рис. 2. Схема задачи о сжатии пластины с эллиптическим отверстием, приводящем к образованию зоны контакта

модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла в условиях сжатия реальный деформированный эллипс заменяется фиктивным деформированным эллипсом. Длины больших осей реального и фиктивного деформированных эллипсов равны $2l_0$, $2(l_0 + \Delta) = 2l$ соответственно. Заметим, что при $x = 0$ длина зоны предразрушения Δ может не совпадать с длиной зоны пластичности. Концевые области фиктивного деформированного эллипса ($l_0 < |y| \leq l$) заполнены пластически деформированным материалом, скрепляющее действие которого заменяется постоянным напряжением, равным пределу текучести материала σ_T . В зоне контакта ($|y| \leq d$, $d < l_0$) противоположные участки границы притягиваются друг к другу силами сцепления материала. Участки границы деформированного эллипса $d < |y| < l_0$ свободны от напряжений.

Для того чтобы упругопластическую задачу, определенную в рамках модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла, свести к граничной задаче теории упругости, используем модифицированный упругопластический аналог задачи Гриффитса для эллипса, в котором тонкая пластина с фиктивным эллипсом сжимается постоянными напряжениями на бесконечности σ_∞ (см. рис. 2). На концевых участках фиктивного эллипса $l_0 \leq |y| \leq l$ действуют сжимающие напряжения $-\sigma_T$, под которыми понимаются силы сцепления материала. В дальнейшем напряжение сцепления материала будем обозначать $\sigma_{сщ}$. На участках границы фиктивного эллипса $|y| \leq d$ действуют сжимающие напряжения, что приводит к формированию зоны контакта. Как отмечено выше, в зоне контакта действуют силы взаимодействия атомов. Для того чтобы учесть уменьшение напряжений сцепления по мере продвижения к концу зоны контакта, распределение сил сцепления представим в виде

$$\sigma_{сщ}(y) = \sigma_{сщ} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{d-y}{d}\right) \quad \text{при } y \leq d, \quad \sigma_{сщ}(y) = 0 \quad \text{при } d < y < l_0.$$

Заметим, что и на концевых участках границы фиктивного эллипса, и в центре зоны контакта действуют максимально возможные напряжения сцепления $\sigma_{сщ} = \sigma_{сщ}(0)$.

Решая поставленную задачу в рамках модифицированного упругопластического аналога задачи Гриффитса для эллипса, определим нормальные перемещения и напряжения в произвольной точке пластины с фиктивным эллипсом, после чего построим достаточный критерий прочности. Достаточный критерий прочности представляет собой систему двух уравнений, одно из которых является условием, исключающим частичное наложение

верхней и нижней поверхностей зоны контакта, другое — деформационным критерием критического раскрытия эллипса. При определенном наборе входных параметров найдем комбинацию критических параметров разрушения: критическое значение внешней сжимающей нагрузки $\sigma_{\infty}^*/\sigma_{\text{сц}}$, критические длины зоны предразрушения $\Delta_1^* = \Delta^*/l_0$ и зоны контакта $d_1^* = d^*/l_0$, при которых выполняется достаточный критерий прочности.

2. СЖАТИЕ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

2.1. Напряжения и нормальные перемещения в произвольной точке пластины с эллиптическим отверстием. Согласно [4] напряжения и перемещения в произвольной точке пластины с эллиптическим отверстием выражаются через первые и вторые производные функции напряжений Эри. Определим функцию напряжений Эри: $F = F^* + F^{**} + F^{***}$. Функция напряжений F^* соответствует распределению напряжений, в случае если контур эллипса свободен от напряжений [4]. Функция напряжений F^{**} описывает распределение напряжений, при котором концевые участки контура фиктивного эллипса нагружены сжимающими напряжениями $-\sigma_{\text{сц}}$. Функция напряжений F^{***} описывает распределение напряжений, при котором центральные участки контура фиктивного эллипса, соответствующие зоне контакта, нагружены сжимающими напряжениями $-\sigma_{\text{сц}}(y)$. Включение добавочной функции напряжений F^{***} в состав функции напряжений Эри обеспечивает появление зоны контакта при сжатии. При удалении от эллиптического отверстия добавочные напряжения быстро уменьшаются. Граничные условия для функций напряжений F^* , F^{**} , F^{***} выводятся из условий на контуре эллипса, выраженных в напряжениях [3, 4].

Таким образом, задача распадается на три задачи, решая которые можно найти функции напряжений F^* , F^{**} , F^{***} , а следовательно, напряжения и перемещения в произвольной точке пластины с деформированным контуром эллипса.

Введем эллиптические координаты [3–5]

$$x_1 = \frac{x}{l_0} = \frac{c_f}{l_0} \operatorname{sh} u \cos v, \quad y_1 = \frac{y}{l_0} = \frac{c_f}{l_0} \operatorname{ch} u \sin v, \quad (1)$$

где $2c_f$ — межфокусное расстояние фиктивного эллипса, такое что

$$\frac{c_f^2}{l_0^2} = (1 + \Delta_1)^2 \left(1 - \frac{\rho_f}{l_0} \frac{1}{1 + \Delta_1} \right),$$

$\rho_f/l_0 = \rho_r/l_0(1 + \Delta_1)$; $\Delta_1 = \Delta/l_0$; ρ_f , ρ_r — радиусы кривизны в вершинах фиктивного и реального эллипсов соответственно. Если в формуле, определяющей c_f/l_0 , принять $\Delta_1 = 0$, то получим формулу для определения межфокусного расстояния c_r/l_0 реального эллипса.

С учетом (1) имеем

$$\left(\frac{x_1}{c_f \operatorname{sh}(u/l_0)} \right)^2 + \left(\frac{y_1}{c_f \operatorname{ch}(u/l_0)} \right)^2 = 1.$$

Следовательно, линии $u = u_0$ являются эллипсами.

Согласно [3] напряжения и нормальные перемещения в произвольной точке пластины с эллиптическим отверстием определяются по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1}(x_1, y_1) = & B_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + B_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial A_1}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} + A_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \right) + \\ & + A_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} + B_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial A_1}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} + A_1 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{y_1}(x_1, y_1) &= A_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + A_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - \frac{\partial B_1}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} - B_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \right) - \\
 &\quad - B_1 \left(\frac{\partial A_1}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} + A_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial B_1}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} - B_1 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right), \\
 \tau_{x_1 y_1}(x_1, y_1) &= A_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} + B_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial A_1}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial v} + A_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \right) - \\
 &\quad - B_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} + B_1 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial A_1}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial v} + A_1 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right); \\
 \frac{\xi(x_1, y_1)}{l_0} &= \frac{\sigma_T}{E} (1 + \nu) \left(- \frac{A_1}{\sigma_T} \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{B_1}{\sigma_T} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{4}{4 - \alpha} \frac{\Phi_1}{\sigma_T} \right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{h^2} \frac{c_f}{l_0} \operatorname{ch} u \cos v, & B_1 &= \frac{1}{h^2} \frac{c_f}{l_0} \operatorname{sh} u \sin v, \\
 \frac{\partial A_1}{\partial u} &= \frac{\cos v \operatorname{sh} u}{h_1^2 c_f / l_0} \left(1 - \frac{2 \operatorname{ch}^2 u}{h_1^2} \right), & \frac{\partial A_1}{\partial v} &= - \frac{\sin v \operatorname{ch} u}{h_1^2 c_f / l_0} \left(1 - \frac{2 \cos^2 v}{h_1^2} \right), \\
 \frac{\partial B_1}{\partial u} &= \frac{\sin v \operatorname{ch} u}{h_1^2 c_f / l_0} \left(1 - \frac{2 \operatorname{sh}^2 u}{h_1^2} \right), & \frac{\partial B_1}{\partial v} &= \frac{\cos v \operatorname{sh} u}{h_1^2 c_f / l_0} \left(1 + \frac{2 \sin^2 v}{h_1^2} \right),
 \end{aligned}$$

$\alpha = 2(1 - \nu)$; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости Юнга; $h^2 = (c_f^2 / l_0^2)(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v)$, $h_1^2 = \operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v$ — коэффициенты искажения.

Запишем функцию напряжений Эри в виде

$$F = F^* + F^{**} + F^{***} = \Phi_0 + x_1 \Phi_1,$$

где $\Phi_0 = \Phi_0(x_1, y_1) = \Phi_0^* + \Phi_0^{**} + \Phi_0^{***}$; $\Phi_1 = \Phi_1(x_1, y_1) = \Phi_1^* + \Phi_1^{**} + \Phi_1^{***}$ ($\Delta \Phi_0 = 0$, $\Delta \Phi_1 = 0$); $F^* = \Phi_0^* + x_1 \Phi_1^*$; $F^{**} = \Phi_0^{**} + x_1 \Phi_1^{**}$; $F^{***} = \Phi_0^{***} + x_1 \Phi_1^{***}$.

С точностью до знака функция напряжений F^* определена в работе [5], в которой приведено решение задачи о растяжении пластины с отверстием в виде эллипса. Поскольку в данной работе рассматривается не растяжение, а сжатие, знак функций напряжений F^* из [5] заменим на противоположный. Тогда формулы для определения функции напряжений F^* , ее частных производных и функции Φ_1^* в условиях сжатия принимают вид

$$\begin{aligned}
 F^* &= - \frac{\sigma_\infty}{8} \frac{c_f^2}{l_0^2} (1 + \operatorname{ch} 2u + 2A^* u + 2C^* e^{-u} \operatorname{sh} u + (-\operatorname{ch} 2u - 1 + 2B^* e^{-2u} + 2C^* e^{-u} \operatorname{sh} u) \cos 2v), \\
 \frac{\partial F^*}{\partial u} &= - \frac{\sigma_\infty}{4} \frac{c_f^2}{l_0^2} (\operatorname{sh} 2u + A^* + C^* e^{-2u} + (-\operatorname{sh} 2u - 2B^* e^{-2u} + C^* e^{-2u}) \cos 2v), \\
 \frac{\partial F^*}{\partial v} &= \frac{\sigma_\infty}{4} \frac{c_f^2}{l_0^2} (-\operatorname{ch} 2u - 1 + 2B^* e^{-2u} + 2C^* e^{-u} \operatorname{sh} u) \sin 2v, \\
 \frac{\partial^2 F^*}{\partial u \partial v} &= \frac{\sigma_\infty^{(1)}}{2} \frac{c_f^2}{l_0^2} (-\operatorname{sh} 2u - 2B^* e^{-2u} + C^* e^{-2u}) \sin 2v, \\
 \frac{\partial^2 F^*}{\partial u^2} &= - \frac{\sigma_\infty^{(1)}}{2} \frac{c_f^2}{l_0^2} (\operatorname{ch} 2u - C^* e^{-2u} + (-\operatorname{ch} 2u + 2B^* e^{-2u} - C^* e^{-2u}) \cos 2v),
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 F^*}{\partial v^2} = -\frac{\sigma_\infty^{(1)} c_f}{2 l_0^2} \left(-\operatorname{ch} 2u - 1 + 2B^* e^{-2u} + 2C^* e^{-u} \operatorname{sh} u \right) \cos 2v,$$

$$\Phi_1^* = -\frac{\sigma_\infty c_f}{2 l_0} \left(\operatorname{sh} u + C^* e^{-u} \right) \cos v,$$

где A^* , B^* , C^* — некоторые константы. Добавление в правые части формул (4) слагаемых, содержащих эти константы, позволяет добиться быстрого уменьшения напряжений при удалении от отверстия. Следует отметить, что, несмотря на изменение знака функции напряжений F^* из [5], формулы, определяющие константы A^* , B^* , C^* для случаев сжатия и растяжения, одни и те же:

$$A^* = -1 - \operatorname{ch} 2u_0, \quad B^* = \frac{1}{2} e^{2u_0} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} e^{4u_0}, \quad C^* = 1 + e^{2u_0},$$

поскольку функция напряжений F^* для случаев растяжения и сжатия удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F^*}{\partial v} = 0.$$

Определим функцию напряжений F^{**} , ее частные производные, функцию Φ_1^{**} в условиях сжатия. Для этого в формулах (4) верхний индекс “*” заменим индексом “**”, а внешнее сжимающее напряжение $-\sigma_\infty$ — напряжением сцепления $-\sigma_{\text{сц}}$. Если в формулах (4) верхний индекс “*” заменить индексом “**”, а внешнее сжимающее напряжение $-\sigma_\infty$ — распределением $-\sigma_{\text{сц}}(y)$, то можно определить функцию напряжений F^{***} , ее частные производные и функцию Φ_1^{***} в условиях сжатия.

Граничные условия для функции напряжений F^{**} определяются из условия равновесия сил в направлении осей x_1 , y_1

$$X^{**} = -\left(\frac{\partial F^{**}}{\partial y_1} \right)_{v=v_2} + \left(\frac{\partial F^{**}}{\partial y_1} \right)_{v=v_1}, \quad Y^{**} = -\left(\frac{\partial F^{**}}{\partial x_1} \right)_{v=v_2} + \left(\frac{\partial F^{**}}{\partial x_1} \right)_{v=v_1} = 0 \quad (5)$$

и условия равенства нулю момента сил M^{**} относительно точки $x_1 = 0$, $y_1 = 0$

$$M^{**} = \left(x_1 \frac{\partial F^{**}}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial F^{**}}{\partial y_1} - F^{**} \right)_{v=v_2} - \left(x_1 \frac{\partial F^{**}}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial F^{**}}{\partial y_1} - F^{**} \right)_{v=v_1} = 0. \quad (6)$$

Здесь частные производные $\partial F^{**}/\partial x_1$, $\partial F^{**}/\partial y_1$ определяются по формулам

$$\frac{\partial F^{**}}{\partial x_1} = \frac{c_f/l_0}{h^2} \left(\operatorname{ch} u_0 \cos v \frac{\partial F^{**}}{\partial u} - \operatorname{sh} u_0 \sin v \frac{\partial F^{**}}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial F^{**}}{\partial y_1} = \frac{c_f/l_0}{h^2} \left(\operatorname{sh} u_0 \sin v \frac{\partial F^{**}}{\partial u} - \operatorname{ch} u_0 \cos v \frac{\partial F^{**}}{\partial v} \right).$$

В равенствах (5) величины X^{**} , $Y^{**} = 0$ — проекции сил, вызываемых сжимающими напряжениями сцепления $\sigma_{\text{сц}}$, действующими на конечном участке контура фиктивного эллипса при $u = u_0$ и $v_1 \leq v \leq v_2$ ($1 \leq y_1 \leq 1 + \Delta_1$). Величина X^{**} определяется по формуле

$$X^{**} = -\sigma_{\text{сц}} \int_{v_1}^{v_2} d \frac{\tilde{l}}{l_0} = -\frac{c_f}{l_0} \sigma_{\text{сц}} \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v} dv, \quad (7)$$

где $\sin v_1 = 1/[(c_f/l_0) \operatorname{ch} u_0] = 1/(1 + \Delta_1)$; $\sin v_2 = (1 + \Delta_1)/[(c_f/l_0) \operatorname{ch} u_0] = 1$; $\cos v_1 < 0$; \tilde{l}/l_0 — безразмерная длина контура $u = u_0$ при $v_1 \leq v \leq v_2$. Поскольку в окрестности

вершины фиктивного эллипса при небольших значениях Δ_1 значение $\cos v$ близко к нулю, формула (7) принимает вид

$$X^{**} \approx -(c_f/l_0)\sigma_{\text{сн}} \operatorname{sh} u_0 (\pi/2 - v_1).$$

Следует отметить, что все слагаемые в обеих частях равенств (5) содержат множитель $-(c_f/l_0)\sigma_{\text{сн}}$. Для упрощения расчетов разделим $\partial F^{**}/\partial x_1$, $\partial F^{**}/\partial y_1$ и X^{**} на эту величину. Тогда в дальнейшем будем рассматривать величины

$$\frac{\partial (F^{**})'}{\partial x_1} = -\frac{l_0\sigma_{\text{сн}}}{c_f} \frac{\partial F^{**}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial (F^{**})'}{\partial y_1} = -\frac{l_0\sigma_{\text{сн}}}{c_f} \frac{\partial F^{**}}{\partial y_1},$$

$$(X^{**})' = -X^{**} \frac{l_0\sigma_{\text{сн}}}{c_f} \approx \operatorname{sh} u_0 (\pi/2 - v_1).$$

Формулу (6) можно упростить, если учесть, что при $Y^{**} = 0$ $(\partial(F^{**})'/\partial x_1)_{v=v_2} = (\partial(F^{**})'/\partial x_1)_{v=v_1}$. Тогда условие равенства нулю момента сил M^{**} относительно точки $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ записывается в виде

$$(x_1|_{v=v_2} - x_1|_{v=v_1}) \frac{\partial (F^{**})'}{\partial x_1} \Big|_{v=v_2} + (y_1|_{v=v_2} - y_1|_{v=v_1}) \frac{\partial (F^{**})'}{\partial y_1} \Big|_{v=v_2} -$$

$$- y_1|_{v=v_1} (X^{**})' + (F^{**})' \Big|_{v=v_1} - (F^{**})' \Big|_{v=v_2} = 0. \quad (8)$$

С учетом граничных условий (5), (6) для функции напряжений F^{**} получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} A_{01}A^{**} + B_{01}B^{**} + C_{01}C^{**} + D_{01} &= (X^{**})', \\ A_{02}A^{**} + B_{02}B^{**} + C_{02}C^{**} + D_{02} &= 0, \\ A_{03}A^{**} + B_{03}B^{**} + C_{03}C^{**} + D_{03} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{\operatorname{sh} u_0 \sin v_1}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_1)} - \frac{1}{4 \operatorname{sh} u_0}, \\ B_{01} &= -\frac{e^{-2u_0}}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} u_0 \sin v_1 \cos 2v_1 + \operatorname{ch} u_0 \cos v_1 \sin 2v_1}{\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_1} + \frac{1}{\operatorname{sh} u_0} \right), \\ C_{01} &= \frac{\cos^2 v_1 \sin v_1 e^{-u_0} \operatorname{sh} u_0}{2(\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_1)} (e^{-u_0} - 2 \operatorname{ch} u_0), \\ D_{01} &= \frac{2 \operatorname{sh} u_0 \sin^3 v_1 \operatorname{sh} 2u_0 + \operatorname{ch} u_0 \cos v_1 \sin 2v_1 (\operatorname{ch} 2u_0 + 1)}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_1)} - \operatorname{ch} u_0, \\ A_{02} &= \operatorname{ch} u_0 \cos v_1, \quad B_{02} = 2 e^{-2u_0} (\operatorname{sh} u_0 \sin v_1 \sin 2v_1 - \operatorname{ch} u_0 \cos v_1 \cos 2v_1), \\ C_{02} &= 2 e^{-u_0} \cos v_1 (2 \operatorname{sh}^2 u_0 \sin^2 v_1 + \operatorname{ch} u_0 \cos^2 v_1 e^{-u_0}), \quad D_{02} = 0, \\ A_{03} &= \operatorname{cth} u_0 (1 - \sin v_1)/4, \\ B_{03} &= e^{-2u_0} (2 \operatorname{cth} u_0 - \operatorname{cth} u_0 \sin v_1 + \cos 2v_1 + 1)/4, \quad C_{03} = e^{-u_0} \operatorname{sh} u_0 \cos^2 v_1/2, \\ D_{03} &= \operatorname{ch}^2 u_0 - \operatorname{ch} u_0 \sin v_1 ((X^{**})' + \operatorname{ch} u_0) + (1 + \operatorname{ch} 2u_0) \sin^2 v_1/4 - (\operatorname{ch} 2u_0 + 1)/4. \end{aligned}$$

Первые два уравнения системы (9) определяются условиями равновесия сил в направлении осей x_1 , y_1 (5), последнее — условием равенства нулю момента сил относительно точки $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ (8).

Решая систему уравнений (9), находим константы A^{**} , B^{**} , C^{**} :

$$A^{**} = \frac{(X^{**})'}{A_{01}} - \frac{B^{**}B_{01}}{A_{01}} - \frac{C^{**}C_{01}}{A_{01}} - \frac{D_{01}}{A_{01}},$$

$$B^{**} = \frac{A_{02}D_{01} - A_{01}D_{02} - A_{02}(X^{**})' - C^{**}(C_{02}A_{01} - A_{02}C_{01})}{A_{01}B_{02} - A_{02}B_{01}},$$

$$C^{**} = [(A_{03}D_{01} - A_{03}(X^{**})' - A_{01}D_{03})(A_{01}B_{02} - A_{02}B_{01}) - (A_{02}D_{01} - A_{02}(X^{**})' - A_{01}D_{02})(A_{01}B_{03} - A_{03}B_{01})] / [(A_{01}C_{03} - A_{03}C_{01})(A_{01}B_{02} - A_{02}B_{01}) - (A_{01}C_{02} - A_{02}C_{01})(A_{01}B_{03} - A_{03}B_{01})].$$

Определив константы A^{**} , B^{**} , C^{**} , можно вычислить функцию напряжений F^{**} .

Граничные условия для функции напряжений F^{***} , определяемые из условия равновесия сил в направлении осей x_1 , y_1 , записываются в виде

$$X^{***} = \int_{v=v_3}^{v=v_4} dX^{***} = - \int_{v=v_3}^{v=v_4} d\left(\frac{\partial F^{***}}{\partial y_1}\right) = -\left(\frac{\partial F^{***}}{\partial y_1}\right)_{v=v_4} + \left(\frac{\partial F^{***}}{\partial y_1}\right)_{v=v_3},$$

$$\left(\frac{\partial F^{***}}{\partial x_1}\right)_{v=v_4} = \left(\frac{\partial F^{***}}{\partial x_1}\right)_{v=v_3}.$$
(10)

Здесь X^{***} — проекция силы, обусловленной наличием сжимающих напряжений $-\sigma_{\text{сн}}(y)$, действующих на центральном участке контура фиктивного эллипса при $u = u_0$ и $v_3 \leq v \leq v_4$ ($0 \leq y_1 \leq d_1$, $d_1 = d/l_0$), где

$$\sin v_3 = 0, \quad \sin v_4 = \frac{d_1}{(c_f/l_0) \operatorname{ch} u_0} = \frac{d_1}{1 + \Delta_1}, \quad \cos v_3 = -1, \quad \cos v_4 < 0.$$

Следует отметить, что правая и левая части выражений (10) содержат распределение $-\sigma_{\text{сн}}(y)$. Разделим $\partial F^{***}/\partial x_1$, $\partial F^{***}/\partial y_1$ и X^{***} на величину $-(c_f/l_0)\sigma_{\text{сн}}(y)$. Тогда в дальнейшем будем рассматривать величины

$$\frac{\partial (F^{***})'}{\partial x_1} = -\frac{l_0\sigma_{\text{сн}}(y)}{c_f} \frac{\partial F^{***}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial (F^{***})'}{\partial y_1} = -\frac{l_0\sigma_{\text{сн}}(y)}{c_f} \frac{\partial F^{***}}{\partial y_1},$$

$$(X^{***})' = -X^{***} \frac{l_0\sigma_{\text{сн}}(y)}{c_f}.$$
(11)

Величина $(X^{***})'$ определяется по формуле

$$(X^{***})' = \int_{v_3}^{v_4} \sqrt{\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v} dv = \operatorname{ch} u_0 \int_{v_3}^{v_4} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v} dv = \operatorname{ch} u_0 E(v_4, k),$$

где

$$E(v, k) = \frac{2v}{\pi} E + \sin v \cos v \left[\frac{k^2}{4} + \frac{k^4}{8} \left(\frac{1}{4} \sin^2 v + \frac{3}{8} \right) + \frac{3k^6}{48} \left(\frac{1}{6} \sin^4 v + \frac{5}{24} \sin^2 v + \frac{15}{48} \right) + \dots \right],$$

$$E = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} - \dots \right) -$$

эллиптический интеграл второго рода и полный эллиптический интеграл соответственно; $k = (\operatorname{ch} u_0)^{-1}$.

С учетом (10), (11) запишем условие равенства нулю момента сил M^{***} относительно точки $x_1 = 0, y_1 = 0$:

$$(x_1|_{v=v_4} - x_1|_{v=v_3}) \frac{\partial (F^{***})'}{\partial x_1} \Big|_{v=v_3} + (y_1|_{v=v_4} - y_1|_{v=v_3}) \frac{\partial (F^{***})'}{\partial y_1} \Big|_{v=v_3} - y_1|_{v=v_4} (X^{***})' + (F^{***})'|_{v=v_3} - (F^{***})'|_{v=v_4} = 0. \quad (12)$$

После проведения необходимых вычислений граничные условия для функции напряжений F^{***} записываются в виде системы трех уравнений

$$\begin{aligned} A_{11}A^{***} + B_{11}B^{***} + C_{11}C^{***} + D_{11} &= (X^{***})', \\ A_{22}A^{***} + B_{22}B^{***} + C_{22}C^{***} + D_{22} &= 0, \\ A_{33}A^{***} + B_{33}B^{***} + C_{33}C^{***} + D_{33} &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{\operatorname{sh} u_0 \sin v_4}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_4)}, & B_{11} &= \frac{e^{-2u_0}}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} u_0 \sin v_4 \cos 2v_4 + \operatorname{ch} u_0 \cos v_4 \sin 2v_4}{\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_4} \right), \\ C_{11} &= -\frac{\cos^2 v_4 \sin v_4 \operatorname{sh} u_0}{2(\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_4)}, & D_{11} &= -\frac{\operatorname{sh} u_0 \operatorname{sh} 2u_0 \sin^3 v_4 + \operatorname{ch}^3 u_0 \cos v_4 \sin 2v_4}{2(\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_4)}, \\ A_{22} &= \frac{\operatorname{ch} u_0 \cos v_4}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_4)} + \frac{\operatorname{ch} u_0}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + 1)}, \\ B_{22} &= \frac{e^{-2u_0}}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} u_0 \sin v_4 \sin 2v_4 - \operatorname{ch} u_0 \cos v_4 \cos 2v_4}{\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_4} - \frac{\operatorname{ch} u_0}{\operatorname{sh}^2 u_0 + 1} \right), \\ C_{22} &= \frac{e^{-u_0} \cos v_4}{2} \left(\frac{2 \operatorname{sh}^2 u_0 \sin^2 v_4 + \operatorname{ch} u_0 \cos^2 v_4 e^{-u_0}}{\operatorname{sh}^2 u_0 + \cos^2 v_4} + \frac{\operatorname{ch} u_0 e^{-u_0}}{\operatorname{sh}^2 u_0 + 1} \right), & D_{22} &= 0, \\ A_{33} &= -\frac{\operatorname{sh} 2u_0}{8(\operatorname{sh}^2 u_0 + 1)} (\cos v_4 + 1), & B_{33} &= e^{-2u_0} \left(\frac{\operatorname{sh} 2u_0 (\cos v_4 + 1)}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + 1)} + \frac{\sin^2 v_4}{2} \right), \\ C_{33} &= \frac{e^{-u_0} \operatorname{sh} u_0 \sin^2 v_4}{2} - \frac{\operatorname{sh} 2u_0 (\cos v_4 + 1) e^{-2u_0}}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + 1)}, \\ D_{33} &= -\operatorname{ch} u_0 \sin v_4 (X^{***})' - (1 + \operatorname{ch} 2u_0) \frac{\sin^2 v_4}{4}. \end{aligned}$$

Первые два уравнения системы (13) определяются условиями равновесия сил в направлении осей x_1, y_1 (10), последнее — условием равенства нулю момента сил относительно точки $x_1 = 0, y_1 = 0$ (12).

Решая систему уравнений (13), находим константы $A^{***}, B^{***}, C^{***}$:

$$\begin{aligned} A^{***} &= \frac{(X^{***})'}{A_{11}} - \frac{B^{***} B_{11}}{A_{11}} - \frac{C^{***} C_{11}}{A_{11}} - \frac{D_{11}}{A_{11}}, \\ B^{***} &= \frac{A_{22} D_{11} - A_{11} D_{22} - A_{22} (X^{***})' - C^{***} (C_{22} A_{11} - A_{22} C_{11})}{A_{11} B_{22} - A_{22} B_{11}}, \end{aligned}$$

$$C^{***} = [(A_{33}D_{11} - A_{33}(X^{***})' - A_{11}D_{33})(A_{11}B_{22} - A_{22}B_{11}) - (A_{22}D_{11} - A_{22}(X^{***})' - A_{11}D_{22})(A_{11}B_{33} - A_{33}B_{11})] / [(A_{11}C_{33} - A_{33}C_{11})(A_{11}B_{22} - A_{22}B_{11}) - (A_{11}C_{22} - A_{22}C_{11})(A_{11}B_{33} - A_{33}B_{11})].$$

Определив константы A^{***} , B^{***} , C^{***} , можно вычислить функцию напряжений F^{***} .

Все составляющие функции Эри $F = F^* + F^{**} + F^{***}$ найдены. Напряжения и нормальное перемещение в произвольной точке пластины с деформированным контуром фиктивного эллипса вычисляются по формулам (2), (3).

Далее построим достаточный критерий прочности и вычислим критические параметры разрушения.

2.2. Критические параметры разрушения пластины с деформированным контуром эллипса при сжатии. Как отмечено выше, первыми начнут контактировать атомы центральной пары, следовательно, при дальнейшем увеличении зоны контакта они будут подвергаться наибольшему воздействию внешних сжимающих нагрузок. Поэтому необходимо выбрать такую сжимающую нагрузку, при которой величина перемещения $\xi(x_0, 0)$ точки с координатами $u = u_0$, $v = -\pi$ не будет превышать величину $x_0 = (c_f/l_0) \operatorname{sh} u_0 = \sqrt{(1 + \Delta_1)^2 - (c_f/l_0)^2}$, что позволит исключить частичное наложение поверхностей зоны контакта. Условие для определения оптимальной нагрузки, исключающей частичное наложение поверхностей зоны контакта, запишем в виде

$$\xi(x_0, 0) = -x_0. \quad (14)$$

Однако выполнение условия (14) не гарантирует, что пластина с деформированным контуром эллиптического отверстия будет находиться в равновесном состоянии. Поэтому рассмотрим деформационный критерий критического раскрытия эллипса [5]

$$2\xi(x_{00}, l_0) = h_T, \quad (15)$$

где $2\xi(x_{00}, l_0)$ — раскрытие фиктивного эллипса в вершине реального эллипса; $x_{00}/l_0 = \sqrt{(1 - (1 + \Delta_1)^{-2})((1 + \Delta_1)^2 - (c_f/l_0)^2)}$; h_T — критическое раскрытие реального эллипса в вершине. Величина h_T , определяемая через поперечный размер пластической зоны в вершине реального эллипса и относительное удлинение пластического материала, равна

$$h_T = 2h(\varepsilon_T - \varepsilon_0),$$

где $\varepsilon_0 = \sigma_T/E$ — предельное удлинение упругого материала; ε_T — предельное удлинение пластического материала. Напомним, что под напряжениями σ_T понимаются силы сцепления материала $\sigma_{\text{сц}}$.

Таким образом, построен достаточный критерий прочности, представляющий собой систему двух уравнений, одно из которых является условием, исключающим частичное наложение верхней и нижней поверхностей зоны контакта (см. формулу (14)), другое — деформационным критерием критического раскрытия эллипса (см. формулу (15)). Критерий (14), (15) представляет собой деформационно-силовой критерий.

Перемещения $\xi(x_0, 0)$ в формуле (14) определяются формулой (3). Проведя необходимые преобразования равенства (14), получаем формулу для определения допустимой нагрузки

$$p = \frac{\sigma_T}{\sigma_\infty}(\Delta_1, d_1, \varepsilon_0, \rho_r/l_0) = \frac{N_1}{N_2}, \quad (16)$$

при которой центральный участок контура эллиптического отверстия прогибается, но частичное наложение поверхностей зоны контакта отсутствует. В формуле (16)

$$N_1 = \frac{\operatorname{ch} u_0}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + 1)} (A^* + 2C^* e^{-2u_0} - 2B^* e^{-2u_0}) + \frac{2}{4 - \alpha} (\operatorname{sh} u_0 + C^* e^{-u_0}),$$

$$N_2 = -\frac{x_0(l_0/c_f)}{\varepsilon_0(1+\nu)} + \frac{\operatorname{ch} u_0}{4(\operatorname{sh}^2 u_0 + 1)} (-A^{**} - A^{***} + 2e^{-2u_0}(-C^{**} - C^{***} + B^{***} + B^{**})) + \frac{2}{4-\alpha} (-C^{**} - C^{***}) e^{-u_0}.$$

Величина раскрытия фиктивного эллипса в вершине реального эллипса $2\xi(x_{00}, l_0)$ в деформационном критерии (15) определяется формулой (3). Оценку поперечного размера пластической зоны в вершине реального эллипса h в критерии (15) можно получить с помощью критерия пластичности Мизеса. В случае плоского напряженного состояния критерий пластичности Мизеса имеет вид

$$3\left(\frac{\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}}{2}\right)^2 + 3\tau_{x_1 y_1}^2 + \left(\frac{\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}}{2}\right)^2 = \sigma_T^2. \quad (17)$$

Подставив в (17) формулы (2), определяющие напряжения в произвольной точке пластины с реальным эллиптическим отверстием (ρ_r/l_0 — радиус кривизны в вершине реального эллипса; $c_r/l_0 = \sqrt{1 - \rho_r/l_0}$), при $y_1 = 1$ ($v = v_1$) имеем уравнение

$$g(p, \rho_r/l_0, h) = 0, \quad (18)$$

позволяющее для вычисленной с помощью (16) допустимой нагрузки p и заданной величины ρ_r/l_0 получить соответствующую оценку поперечного размера зоны пластичности $2h$. Детальное описание процесса вычисления поперечного размера пластической области, образующейся при растяжении пластины с эллиптическим отверстием, приведено в [3].

Вычислим критические параметры разрушения: критическое значение внешней сжимающей нагрузки p^* , критические длины зоны предразрушения Δ_1^* и зоны контакта d_1^* . Критические параметры разрушения можно получить из достаточного критерия прочности (14), (15). Сначала определим допустимую нагрузку p . Параметры ε_0 , ε_T , ρ_r/l_0 будем считать заданными. Перебирая пары $(\Delta_1^{(i)}, d_1^{(j)})$ ($\Delta_1^{(i+1)} = \Delta_1^{(i)} + t$, $d_1^{(j+1)} = d_1^{(j)} + t$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$) при $t = 0,0005$, $\Delta_1^{(0)} = 0,0001$, $d_1^{(0)} = 0,0001$, по формуле (16) вычисляем p . Будем фиксировать только такие комбинации параметров $(\Delta_1^{(i)}, d_1^{(j)})$, для которых $p > 1$. Необходимо выяснить, удовлетворяет ли какая-либо из этих комбинаций деформационному критерию критического раскрытия эллипса (16). При $y_1 = 1$ ($v = v_1$) по формуле (3) вычисляем раскрытие $2\xi(x_{00}, l_0)/l_0$ фиктивного эллипса в вершине реального эллипса. Используя формулы (2), (18), получим оценку поперечного размера $2h$ пластической зоны. Деформационный критерий критического раскрытия эллипса (16) запишем в виде

$$2\xi(x_{00}, l_0) - h_T = f(\Delta_1^{(i)}, d_1^{(j)}, p, h, \varepsilon_0, \varepsilon_T, \rho_r/l_0) \approx 0. \quad (19)$$

Согласно (19) выбираем только такую комбинацию параметров $\Delta_1^{(i)}, d_1^{(j)}, p, h, \varepsilon_0, \varepsilon_T, \rho_r/l_0$, при которой величина $f(\Delta_1^{(i)}, d_1^{(j)}, p, h, \varepsilon_0, \varepsilon_T, \rho_r/l_0)$ принимает минимальное значение, близкое к нулю. Параметры $p^* = p$, $\Delta_1^* = \Delta_1^{(i)}$, $d_1^* = d_1^{(j)}$ являются критическими параметрами разрушения, при которых не происходит частичного наложения верхней и нижней поверхностей зоны контакта, а пластина с деформированным контуром эллипса находится в предельно равновесном состоянии.

В таблице приведены критические значения параметров разрушения p^* , Δ_1^* , d_1^* для ряда пластичных материалов, а также численные оценки поперечного размера пластической зоны h . Значения параметров ε_0 , ε_T взяты из работы [6]. Согласно данным, приведенным в таблице, чем пластичнее материал, тем меньшее значение удаленной нагрузки необходимо для поддержания равновесной конфигурации. Пластины с отверстиями, имеющими

Критические параметры разрушения

Материал	ε_T	ε_0	ρ_r/l_0	p^*	Δ_1^*	d_1^*	h
Отожженная медь, имеющая наноструктуру	0,452 20	0,002 20	0,001	10,538	0,001	0,998	0,006
			0,005	4,318	0,031	0,957	0,038
Углеродистая сталь (0,1 % С)	0,331 24	0,000 95	0,001	4,383	0,015	0,993	0,037
			0,005	2,894	0,115	0,987	0,094
Углеродистая сталь (0,3 % С)	0,241 76	0,001 57	0,001	3,834	0,006	0,995	0,050
			0,005	2,691	0,084	0,966	0,112

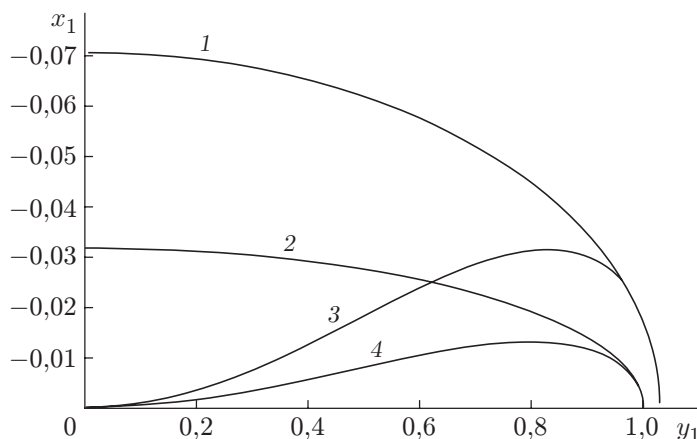


Рис. 3. Начальные (1, 2) и конечные (3, 4) формы границы эллиптического отверстия при сжатии пластин из отожженной меди, имеющей наноструктуру:
1 — $\rho_r/l_0 = 0,005$; 2 — $\rho_r/l_0 = 0,001$

больший радиус кривизны в вершине, для поддержания равновесной конфигурации должны сжиматься с большими удаленными нагрузками. Действие таких нагрузок приводит к возникновению более обширных пластических зон, что в свою очередь оказывает влияние на длину зоны контакта. Размер пластической зоны характеризует ее поперечный размер: чем больше размер пластической зоны, тем меньше длина зоны контакта.

На рис. 3 для отожженной меди, имеющей наноструктуру, показано деформирование границ эллипсов с различными радиусами кривизны. Границы эллипсов с радиусами кривизны $\rho_r/l_0 = 0,005$ (кривая 1), $\rho_r/l_0 = 0,001$ (кривая 2) переходят в кривые 3, 4 соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения существенно нелинейной задачи использован подход, основанный на сведении упругопластической задачи, определенной в рамках модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла, к упругопластическому аналогу задачи Гриффитса с помощью модели Гудьера и Каннинена. В результате задача значительно упростилась, что позволило качественно и количественно описать процесс сжатия пластины с эллиптическим отверстием с образованием зоны контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабанов А. П. О механизме роста усталостной трещины в поле внешних сжимающих напряжений // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 6. С. 108–115.

2. **Гудьер Дж.** Математическая теория равновесных трещин // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 13–82.
3. **Кожевникова М. Е.** Трещина нормального отрыва с небольшими, относительно широкими пластическими зонами. Модель Леонова — Панасюка — Дагдейла // Физ. мезомеханика. 2007. Т. 10, № 2. С. 43–52.
4. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.: Гостехтеоретиздат, 1947.
5. **Кожевникова М. Е.** Геометрическая форма деформированной трещины нормального отрыва при разгрузке и повторном растяжении // Физ. мезомеханика. 2008. Т. 11, № 4. С. 43–59.
6. **Корнев В. М.** Взаимосвязь параметров $(\sigma-\varepsilon)$ -диаграммы материалов с процессом разрушения // Физ. мезомеханика. 2006. Т. 9, № 4. С. 71–78.

*Поступила в редакцию 23/V 2008 г.,
в окончательном варианте — 19/VI 2009 г.*
