

8. Miller R. E. Infrared laser spectroscopy of molecular beams using a room-temperature beam detector: application to the study of translational freezing in free-jet expansions. — Rev. Sci. Instrum., 1982, vol. 53, N 11. Рус. пер. Лазерная ИК-спектроскопия молекулярных пучков при помощи детектора комнатной температуры: Применение для исследования замораживания поступательных степеней свободы в свободно расширяющихся струях. — ПНИ, 1983, № 11.
9. Young W. S. Distortion of time-of-flight signals. — Rev. Sci. Instrum., 1973, vol. 44, N 6. Рус. пер. Искажение время-пролетных сигналов. — ПНИ, 1973, № 6.
10. Зарвин А. Е. Время-пролетный метод измерения функций распределения скоростей молекул. — В кн.: Неравновесные процессы в потоках разреженного газа. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1977.
11. Седелников А. И. Модельная задача восстановления функции распределения по время-пролетному сигналу. — В кн.: Некорректные обратные задачи атомной физики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976.
12. Смит Р., Джонс Ф., Чесмер Р. Обнаружение и измерение инфракрасного излучения. М.: ИЛ, 1959.
13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
14. Колосов А. В., Седелников А. И. Влияние параметров время-пролетной схемы на восстановление функции распределения молекулярных скоростей. — В кн.: Физическая газодинамика. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1976.

Поступила 22/II 1984 г.

УДК 533.9

## ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ МГД-ОБТЕКАНИИ ПЛАСТИНЫ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В. И. Яковлев  
(Новосибирск)

Широко известны результаты теоретических и экспериментальных исследований магнитогидродинамического обтекания тел в однородных внешних полях. Значительно менее исследованы задачи МГД-обтекания тел конечных размеров в электромагнитных полях, создаваемых источниками, находящимися внутри и на поверхности тела. Такие источники позволяют в большей степени управлять распределением электромагнитных объемных сил (ЭОС) в жидкости и видоизменять как гидродинамическую картину обтекания, так и величину гидродинамического сопротивления, как это видно из численных исследований [1—3], проведенных для случая умеренных чисел Рейнольдса.

Данная работа посвящена аналитическому исследованию вторичных течений, возникающих при обтекании плоской пластины конечной ширины с внутренним источником [4] для случая больших чисел Рейнольдса и малых параметров МГД-взаимодействия  $N$ . Построено точное решение для первого члена разложения рассматриваемого трехмерного поля течения по параметру  $N$ . С помощью полученного решения исследованы качественные особенности струи, формируемой в следе за пластиной, и условия, при которых вторичное течение близко к двумерному.

1. Для удобства изложения здесь вкратце напомним основные элементы рассматриваемой системы [4], представляющей пластину нулевой толщины, бесконечную по координате  $y$  и имеющую ширину  $a$  по оси  $x$ . Пластина обтекается потоком несжимаемой проводящей жидкости со скоростью  $u_0 e_x$  на бесконечности вверх по потоку. Внутренний источник кондукционного типа состоит из магнитной системы в виде набора периодических токовых ячеек (поверхностных, расположенных в плоскости пластины)

$$(1.1) \quad \mathbf{i}(x, y) = J_0 \left[ i(x) \mathbf{e}_x + \frac{i}{k_0} \frac{di}{dx} \mathbf{e}_y \right] e^{ik_0 y}, \quad i(x) = \begin{cases} i_0(x) & \text{при } |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{при } |x| > 1/2 \end{cases}$$

$$(|i_0(x)|_{\max} = 1)$$

и идеально секционированных электродов с потенциалом, периодически ( $\sim e^{ik_0 y}$ ) за висящим от  $y$ . Как видно из (1.1), магнитная система задается одной безразмерной функцией  $i_0(x)$ , которая считается вещественной, и безразмерным волновым числом  $k_0$  (обезразмеривание производится с использованием  $a$  в качестве масштаба длины). Вид функции  $i_0(x)$  и значение  $k_0$  определяют характер токовых ячеек (схематически изображенных

на фиг. 2 [4]), составляющих магнитную систему источника, и, следовательно, в большой степени зависят от функционального назначения МГД-устройства. Если, например, данное устройство служит для ускорения набегающего потока или для преобразования энергии набегающего потока в электрическую, то его магнитная система должна состоять из вытянутых по оси  $x$  (т. е. по потоку) токовых ячеек; при этом токи будут в основном продольные, а поперечные, замыкающие токи должны располагаться только вблизи кромок пластины в полосе определенной ширины. Такому виду магнитной системы соответствует функция  $i_0(x)$ , равная единице на большей части интервала  $|x| \leq 0,5$  и спадающая к нулю на концах этого интервала.

Конкретные исследования вторичных течений, обусловленных электромагнитными силами, ниже проводятся для функции

$$(1.2) \quad i_0(x) = \frac{(1 - e^{-(0,5+x)k_0})(1 - e^{-(0,5-x)k_0})}{(1 - e^{-0,5k_0})^2},$$

которая при  $k_0 \gg 1$ , как показано в [4], обеспечивает близкую к оптимальной магнитную систему для ускорения потока.

2. Вихревое течение вокруг пластины, обусловленное электромагнитными силами, в работе исследуется для наиболее интересного случая больших чисел Рейнольдса. При этом существенное возмущение поля скоростей однородного набегающего потока происходит вблизи пластины на расстояниях от нее (по нормали), не превышающих  $\lambda = (2\pi/k_0)a$ . Предполагая справедливым условие малости толщины пограничного слоя, при котором силовое поле и область возмущения поля скоростей выходят далеко за пределы вязкого пограничного слоя, исследование поля скоростей вне этого слоя можно проводить без учета влияния вязкости. При этом безразмерное поле скоростей удовлетворяет уравнениям гидродинамики

$$(2.1) \quad (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + N\mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$$

с силовым полем

$$(2.2) \quad \mathbf{f} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \mathbf{H}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{V}H^2,$$

условию отсутствия возмущений на бесконечности вверх по потоку, т. е.

$$(2.3) \quad \mathbf{V}|_{x=-\infty} = \mathbf{e}_x,$$

и условию непротекания на пластине.

Магнитное поле в жидкости, входящее в (2.2), в безындукционном приближении не зависит от поля скоростей и определяется заданными в плоскости пластины поверхностными токами (1.1).

На электрическое поле возмущение поля скоростей оказывает влияние из-за появления объемных зарядов в области возмущенного течения, и этим влиянием нельзя пренебречь. Безразмерный потенциал электрического поля описывается неоднородным уравнением

$$(2.4) \quad \Delta \varphi(x, y, z) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{V}.$$

В качестве масштабов при обезразмеривании  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\varphi$  используются  $H_0 = 2\pi J_0/c$ ,  $u_0 H_0/c$ ,  $au_0 H_0/c$  соответственно.

3. В предположении  $N \ll 1$  решение уравнений (2.1), (2.4) ищется в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{V}(x, y, z) &= \mathbf{e}_x + N\mathbf{V}_1(x, y, z) + N^2\mathbf{V}_2(x, y, z) + \dots, \\ p(x, y, z) &= Np_1(x, y, z) + N^2p_2(x, y, z) + \dots, \\ \varphi(x, y, z) &= \varphi_0(x, y, z) + N\varphi_1(x, y, z) + N^2\varphi_2(x, y, z) + \dots, \end{aligned}$$

причем в точной постановке ограничимся построением решения для поля скоростей лишь в первом порядке. Из уравнений (2.1) и условия (2.3)

задача сводится к следующей:

$$(3.2) \quad \partial \mathbf{V}_1 / \partial x = -\nabla p_1 + \mathbf{f}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V}_1 = 0, \quad \mathbf{f}_0 = [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}] + H_x \mathbf{H} - H^2 \mathbf{e}_x,$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= -\nabla \varphi_0(x, y, z); \\ \mathbf{V}_1|_{x=-\infty} &= 0. \end{aligned}$$

Функция  $\varphi_0(x, y, z)$ , входящая в  $\mathbf{f}_0$ , определяется как решение задачи

$$(3.4) \quad \Delta \varphi_0(x, y, z) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right|_{z=+0} = \pm \kappa e^{ik_0 y} i(x), \quad \varphi_0|_{\infty} = 0$$

с граничным условием, полученным в [4] из условия оптимизации\*. Поле  $\mathbf{H}$  определяется заданными поверхностными токами (1.1), которые с помощью дельта-функции  $\delta(z)$  можно представить в виде объемных токов

$$(3.5) \quad \frac{J_0}{z} \mathbf{j}(x, y, z) = \frac{J_0}{a} e^{ik_0 y} \left[ i(x) \mathbf{e}_x + \frac{i}{k_0} \frac{di}{dx} \mathbf{e}_y \right] \delta(z)$$

и задачу определения безразмерного поля  $\mathbf{H}$  во всем пространстве свести к следующей:

$$(3.6) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 2\mathbf{j}(x, y, z), \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{H}|_{\infty} = 0.$$

В [4] решения задач (3.4), (3.6) содержатся в фурье-представлении по переменной  $x$ . Для решения уравнений (3.2) силовое поле  $\mathbf{f}_0$ , а следовательно, и поля  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}$  необходимо иметь в фурье-представлении по переменным  $x, z$ . Представив безразмерную плотность тока (3.5) в виде двумерного разложения

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(x, y, z) &= e^{ik_0 y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}(k_x, k_z) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z, \\ \mathbf{j}(k_x, k_z) &= \frac{1}{2\pi} \left( \mathbf{e}_x - \frac{k_z}{k_0} \mathbf{e}_y \right) i(k_x), \quad i(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} i_0(x) e^{-ik_x x} dx, \end{aligned}$$

решение задачи (3.6) получим в аналогичном виде с фурье-образом:

$$\mathbf{H}(k_x, k_z) = \frac{i}{\pi k_0} \frac{k_z (k_x \mathbf{e}_x + k_0 \mathbf{e}_y) - (k_0^2 + k_x^2) \mathbf{e}_z}{k_x^2 + k_0^2 + k_z^2} i(k_x).$$

Заметим, что вследствие вещественности функции  $i_0(x)$  из (1.1) ее фурье-образ, входящий в (3.7), обладает свойством

$$(3.7) \quad i(-k_x) = i^*(k_x).$$

Решение задачи (3.4) имеет вид

$$(3.8) \quad \varphi_0(x, y, z) = e^{ik_0 y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k_x, k_z) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z,$$

$$\varphi(k_x, k_z) = \frac{\kappa}{\pi} \frac{i(k_x)}{k_x^2 + k_0^2 + k_z^2}.$$

Осуществив интегрирование по переменной  $k_z$ , интеграл (3.8) и аналогичный интеграл для  $\mathbf{H}$  легко можно привести к соответствующим выражениям из [4] и убедиться, таким образом, в верности выписанных решений.

Для приведения силового поля  $\mathbf{f}_0$  к нужному виду заметим, что если две вещественные функции  $B_1$  и  $B_2$  имеют фурье-представления

$$B_{1,2}(x, y, z) = \operatorname{Real} e^{ik_0 y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_{1,2}(k_x, k_z) e^{i(k_x x + k_z z)} dk_x dk_z,$$

\* Вместо  $\kappa$  в [4] фигурирует константа  $1 + 1/\gamma$ .

от произведения  $C(x, y, z) = B_1(x, y, z)B_2(x, y, z)$  может быть приведено к виду

$$(3.9) \quad C(x, y, z) = \text{Real} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C^{(1)}(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 z)} dk_1 dk_2 + \right. \\ \left. + e^{2ih_0 y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C^{(2)}(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 z)} dk_1 dk_2 \right\}, \\ C^{(1)}(k_1, k_2) = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_1 \left( \frac{k_1 + q_1}{2}, \frac{k_2 + q_2}{2} \right) B_2^* \left( \frac{q_1 - k_1}{2}, \frac{q_2 - k_2}{2} \right) dq_1 dq_2, \\ C^{(2)}(k_1, k_2) = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_1 \left( \frac{k_1 + q_1}{2}, \frac{k_2 + q_2}{2} \right) B_2 \left( \frac{k_1 - q_1}{2}, \frac{k_2 - q_2}{2} \right) dq_1 dq_2.$$

Из (3.9) видно, что фурье-компоненты векторного поля  $f_0$  (3.2) выражаются через двойные интегралы по  $q_1, q_2$ . Интегрирование по переменной  $q_2$  оказывается возможным осуществить в явном виде (с использованием вычетов) и окончательный результат с учетом (3.7) привести к виду

$$(3.10) \quad f_0 = \text{Real} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 z)} dk_1 dk_2 + \right. \\ \left. + e^{2ih_0 y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(2)}(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 z)} dk_1 dk_2 \right\};$$

$$(3.11) \quad f^{(1,2)}(k_1, k_2) = \frac{\alpha^{(1,2)}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i \left( \frac{k_1 + q_1}{2} \right) i \left( \frac{k_1 - q_1}{2} \right)}{V^{\pm} [k_2^2 + v_2^2(k_1, q_1)]} \left\{ \left[ \frac{\kappa - 1}{2} (\alpha^{(1,2)} \bar{V}^{\pm} - \right. \right. \\ \left. \left. - 4k_0^2 - k_1^2 - q_1^2) + (k_1^2 \delta_q + q_1^2 \delta_h) \right] (\bar{V}^{\pm} + V) e_x + \right. \\ \left. + \gamma^{(1,2)} \frac{k_1}{4k_0} [2\kappa (v_1^2 - v_2^2) + \bar{V}^{\pm} V] (\bar{V}^{\pm} + V) e_y + \right. \\ \left. + k_2 [k_1 (\delta_q - \beta^{(1,2)} \kappa) (\bar{V}^{\pm} + V) + q_1 (\delta_h - \gamma^{(1,2)} \kappa) (\bar{V}^{\pm} - V)] e_z \right\} dq_1.$$

Здесь и далее

$$\bar{V}^{\pm} = \sqrt{4k_0^2 + (k_1 + q_1)^2}, \quad V = \sqrt{4k_0^2 + (k_1 - q_1)^2}, \quad v_1 = \sqrt{4k_0^2 + k_1^2}, \\ v_2 = \sqrt{\frac{4k_0^2 + k_1^2 + q_1^2 + \bar{V}^{\pm} V}{2}}, \quad \delta_q = \frac{4k_0^2 + k_1^2 - q_1^2}{8k_0^2}, \quad \delta_h = \frac{4k_0^2 + q_1^2 - k_1^2}{8k_0^2}.$$

Константы  $\alpha, \beta, \gamma$  имеют значения  $\alpha^{(1)} = -1, \beta^{(1)} = 1, \gamma^{(1)} = 0, \alpha^{(2)} = 1, \beta^{(2)} = 0, \gamma^{(2)} = 1$ . Из приведенных выражений видно, что силовое поле  $f_0$  состоит из двух частей. Одна из них имеет объемный характер и периодична по  $y$  с периодом  $\lambda/2$ . Другая не зависит от  $y$  и не содержит  $y$ -составляющей, т. е. представляет плоское  $(x, z)$  силовое поле.

4. Обратимся к задаче (3.2), (3.3). Вследствие (3.10) ее решение также складывается из аналогичных двух частей

$$(4.1) \quad V_1(x, y, z) = V_c(x, z) + e^{2ih_0 y} \tilde{V}(x, z), \quad p(x, y, z) = \\ = p_c(x, z) + e^{2ih_0 y} \tilde{p}(x, z);$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial V_c}{\partial x} = -\nabla p_c + f_c(x, z), \quad \frac{\partial V_c}{\partial x} + \frac{\partial V_c}{\partial z} = 0;$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} = -\nabla \tilde{p} - 2ik_0 \tilde{p} \mathbf{e}_y + \tilde{\mathbf{f}}(x, z), \quad \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z} + 2ik_0 \tilde{V}_y = 0;$$

$$(4.4) \quad \mathbf{V}_c|_{x=-\infty} = \tilde{\mathbf{V}}|_{x=-\infty} = 0; \quad p_c|_{x=-\infty} = \tilde{p}|_{x=-\infty} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{f}_c(x, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}^{(1)}(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 z)} dk_1 dk_2$ ,  $\tilde{\mathbf{f}}(x, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}^{(2)}(k_1, k_2) \times$   
 $\times e^{i(k_1 x + k_2 z)} dk_1 dk_2$ .

Частные решения (отмечаются звездочками) неоднородных уравнений (4.2), (4.3) ищем в виде

$$(4.5) \quad \mathbf{V}_c^*(x, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_c^*(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 z)} dk_1 dk_2.$$

(аналогично для других неизвестных). Из (4.2), (4.3) получаем

$$(4.6) \quad \mathbf{V}_c^*(k_1, k_2) = \frac{(\mathbf{k} - 2k_0 \mathbf{e}_y) [(\mathbf{k} - 2k_0 \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{f}^{(1)}(k_1, k_2)] - (k_1^2 + k_2^2) \mathbf{f}^{(1)}(k_1, k_2)}{ik_1(k_1^2 + k_2^2)},$$

$$\tilde{\mathbf{V}}(k_1, k_2) = \frac{k^2 \mathbf{f}^{(2)}(k_1, k_2) - [\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}^{(2)}(k_1, k_2)] \mathbf{k}}{ik_1 k^2} \quad (\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_x + 2k_0 \mathbf{e}_y + k_2 \mathbf{e}_z).$$

Как следует из (4.5), (4.6), (3.11), искомые решения представляются трехмерными интегралами в пространстве  $k_1, k_2, q_1$ . С помощью вычетов интегрирование по  $k_2$  удается осуществить в явном виде и все искомые величины привести к двумерным интегралам. В общем случае произвольной вещественной функции  $i_0(x)$  полученными интегралами трудно воспользоваться для анализа исследуемого течения, и поэтому они здесь не воспроизводятся. Имеется важный частный случай — случай четных функций  $i_0(x)$ , при которых фурье-образ  $i(k_x)$  является вещественной четной функцией, вследствие чего произведение  $i[(k_1 - q_1)/2]i[(k_1 + q_1)/2]$ , а также функции  $F(k_1, q_1)$ ,  $\Lambda(k_1, q_1)$ , входящие в рассматриваемые интегралы, становятся четными функциями по обоим переменным  $k_1$  и  $q_1$  и позволяют привести искомые выражения к следующим вещественным интегралам:

$$(4.7) \quad V_{cx}^* = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(k_1, q_1) \frac{k_1 e^{-k_1 z} - v_2 e^{-v_2 z}}{v_2^2 - k_1^2} \frac{\sin k_1 x}{k_1} dk_1 dq_1,$$

$$V_{cz}^* = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(k_1, q_1) \frac{e^{-k_1 z} - e^{-v_2 z}}{v_2^2 - k_1^2} \cos k_1 x dk_1 dq_1,$$

$$F(k_1, q_1) = \frac{i \left( \frac{k_1 - q_1}{2} \right) i \left( \frac{k_1 + q_1}{2} \right)}{\overline{V} V} \{ [(\kappa - 1)(4k_0^2 + q_1^2) - (k_1^2 + q_1^2 \delta_k)] \times$$

$$\times (\overline{V} + V) + k_1 q_1 (\delta_k - \kappa + 1) (\overline{V} - V) \};$$

$$(4.8) \quad \tilde{V}_x^* = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Lambda(k_1, q_1) \frac{\sin k_1 x}{k_1} \left\{ \left[ k_1^2 (1 + \delta_k - \kappa) (\overline{V} + V) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + k_1 v_1^2 (\kappa - \delta_k) \frac{\overline{V} - V}{q_1} \right] \frac{e^{-v_1 z}}{v_1} + \left[ (k_1^2 (\kappa - 1) - k_1^2 - q_1^2 \delta_k) (\overline{V} + V) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (-v_1^2 (\kappa - 1) + q_1^2 \delta_k) k_1 \frac{\overline{V} - V}{q_1} \right] \frac{e^{-v_2 z}}{v_2} \right\} dk_1 dq_1,$$

$$\tilde{V}_y^* = \frac{1}{2ik_2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Lambda(k_1, q_1) \cos k_1 x \left\{ 4k_0^2 \left[ (\delta_k - \kappa + 1) (\overline{V} + V) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\kappa - \delta_R) \frac{\bar{V} - \bar{V}}{k_1 q_1} \frac{e^{-v_1 z}}{v_1} + \left[ (-4k_0^2 + (\kappa - 1)(q_1^2 - k_1^2)) (\bar{V} + \bar{V}) + \right. \\
& \left. + (\kappa - 1)(v_1^2 - q_1^2) k_1 \frac{\bar{V} - \bar{V}}{q_1} \right] \frac{e^{-v_2 z}}{v_2} dk_1 dq_1, \\
\bar{V}_z^* & = \int_0^\infty \int_0^\infty \Lambda(k_1, q_1) \cos k_1 x \times \\
& \times \left\{ (e^{-v_2 z} - e^{-v_1 z}) \left[ (\kappa - 1 - \delta_R) (\bar{V} + \bar{V}) - v_1^2 (\kappa - \delta_R) \frac{\bar{V} - \bar{V}}{q_1 k_1} \right] \right\} dk_1 dq_1, \\
\Lambda(k_1, q_1) & = \frac{i \left( \frac{k_1 - q_1}{2} \right) i \left( \frac{k_1 + q_1}{2} \right)}{\bar{V} V} \frac{q_1^2}{v_1^2 - v_2^2}.
\end{aligned}$$

Из приведенных решений видно, что поперечные компоненты полей  $\mathbf{V}_c^*$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}^*$  являются четными функциями по  $x$ , причем при  $x \rightarrow \pm\infty$  все они стремятся к нулю. Продольные компоненты  $V_{cx}^*$ ,  $\tilde{V}_x^*$  нечетные по  $x$  и на бесконечности вверх и вниз по потоку отличны от нуля. Действительно, при  $x \rightarrow \infty$  внутренние интегралы (по  $k_1$ ) в выражениях (4.7), (4.8) стремятся к величинам, равным произведению  $\pi/2$  на значения соответствующих подынтегральных функций при  $k_1 = 0$ ,  $x = 1$ , и вследствие этого искомые пределы принимают значения

(4.9)

$$\begin{aligned}
V_{cx}^* |_{x=\pm\infty} & = \pm V_0(z), \quad V_0(z) = 2\pi \int_0^\infty |i(q)|^2 \left[ (\kappa - 1) - \frac{q^2}{2k_0^2} \right] e^{-2\sqrt{k_0^2 + q^2}z} dq, \\
\tilde{V}_x^* |_{x=\pm\infty} & = \pm \tilde{V}_0(z), \quad \tilde{V}_0(z) = \frac{\pi}{k_0^2} \int_0^\infty |i(q)|^2 q^2 e^{-2\sqrt{k_0^2 + q^2}z} dq
\end{aligned}$$

(видно, что  $\tilde{V}_0(z)$  не содержит  $\kappa$  и совпадает с  $-V_0(z)|_{\kappa=1}$ ). Таким образом, построенное частное решение неоднородных уравнений (4.2), (4.3) не удовлетворяет условию (4.4) отсутствия возмущений на бесконечности вверх по потоку и должно быть дополнено соответствующими решениями однородных уравнений. Окончательно имеем

$$(4.10) \quad \mathbf{V}_c = \mathbf{V}_c^*(x, z) + V_0(z) \mathbf{e}_x, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{V}}^*(x, z) + \tilde{V}_0(z) \mathbf{e}_x.$$

Эти соотношения совместно с (4.7)–(4.9) составляют искомое решение (4.1) первого приближения для полей скоростей, справедливое для произвольной четной функции  $i_0(x)$ .

5. Характер рассматриваемого течения определяется видом внутреннего источника, т. е. функцией  $i_0(x)$  и параметрами  $k_0$ ,  $\kappa$ . Наиболее простой характер вторичное течение имеет в следе достаточно далеко за пластиной. Здесь векторы  $\mathbf{V}_c$  и  $\tilde{\mathbf{V}}$  имеют только продольные компоненты, поэтому течение в следе представляет собой нерасплывающуюся (из-за отсутствия вязкости) струю.

Распределение скорости в плоскости симметрии струи на основании (4.1), (4.9), (4.10) имеет вид

$$(5.1) \quad \mathbf{V}_{z=0} = 2N[V_0(0) + \tilde{V}_0(0) \cos 2k_0 y] \mathbf{e}_x,$$

т. е. определяется величинами  $V_0(z)|_{z=0} = V_0(0)$ ,  $\tilde{V}_0(z)|_{z=0} = \tilde{V}_0(0)$ , для которых из соотношений (4.9) (при  $z = 0$ ) с использованием равенств

Парсевала

$$\int_0^{\infty} |i(q)|^2 dq = \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/2} i_0^2(x) dx, \quad \int_0^{\infty} |i(q)|^2 q^2 dq = \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/2} \left(\frac{di_0}{dx}\right)^2 dx$$

получаются выражения

$$V_0(0) = \frac{(\kappa - 1) \left[ 1 + 4e^{-k_0} + e^{-2k_0} - \frac{3}{k_0} (1 - e^{-2k_0}) \right] - \frac{1}{2k_0} (1 - e^{-2k_0}) + e^{-k_0}}{2(1 - e^{-0,5k_0})^4},$$

$$\tilde{V}_0(0) = -V_0(0)|_{\kappa=1=0}.$$

На фиг. 1 полученная зависимость  $V_0(0)$  от  $k_0$  представлена для  $\kappa = 1,0$ ;  $1,2$ ;  $1,5$ ;  $2,0$  (кривые 1—4 соответственно), причем кривая 1 описывает также  $-\tilde{V}_0(0)$ . Вообще говоря, из-за линейной зависимости  $V_0(0)$  от  $\kappa - 1$  полная информация об исследуемой величине содержится в кривых 1, 4. С этой точки зрения кривые 2, 3 являются «лишними» и здесь приведены лишь для наглядности. Из графиков видно, что при  $k_0 < k_0^*(\kappa)$  средняя скорость в плоскости симметрии струи отрицательна, причем  $k_0^*(\kappa)$  равна примерно  $0,7\pi$  при  $\kappa = 2$  и увеличивается до  $1,7\pi$  при уменьшении  $\kappa$  до значения 1,2.

Исследуемое поле скоростей при малых  $k_0 \sim \pi$  имеет еще одну характерную особенность: здесь величины  $V_0(0)$ ,  $\tilde{V}_0(0)$  из (5.1) одинаковы по порядку, в то время как при больших  $k_0$  (и конечных  $\kappa - 1$ ) отношение масштаба «переменной» (т. е. зависящей от  $y$ ) составляющей скорости в струе к масштабу средней скорости равно

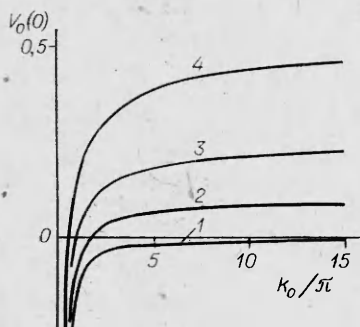
$$(5.2) \quad \frac{\tilde{V}_0(0)}{V_0(0)} = O \left[ \frac{1}{k_0(\kappa - 1)} \right].$$

Таким образом, при больших  $k_0$  струя, обусловленная электромагнитными силами, имеет плоский характер, а при  $k_0 \sim \pi$  состоит из «языков», периодических по  $y$ .

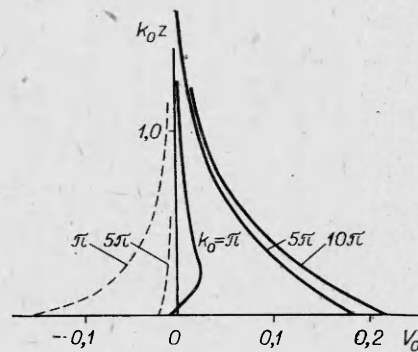
Профиль скорости в струе подобен профилю скорости в середине пластины независимо от характеристик источника электромагнитных полей, так как согласно (4.9), (4.10)

$$V_{cx}|_{x=\infty} = 2V_{cx}|_{x=0} = 2V_0(z), \quad \tilde{V}_x|_{x=\infty} = 2\tilde{V}_x|_{x=0} = 2\tilde{V}_0(z).$$

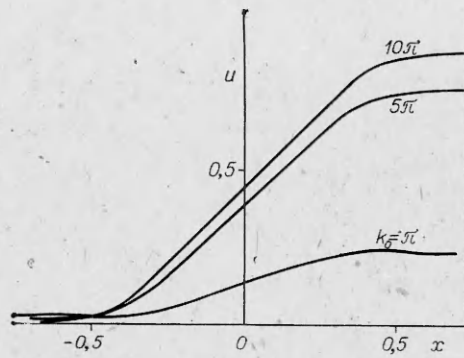
О форме профиля можно судить по фиг. 2, на которой изображены рассчитанные для (1.2) функции  $V_0(z)$  при трех характерных значениях  $k_0$  (следует обратить внимание, что по вертикальной оси здесь отложено произведение  $k_0 z$ ). Вследствие линейной зависимости  $V_0(z)$  от параметра  $\kappa - 1$  кривые приведены лишь для двух значений  $\kappa = 1,5$  (сплошные) и  $\kappa = 1,0$  (штриховые), причем последние характеризуют также функцию



Фиг. 1



Фиг. 2



Ф и г. 3

$\bar{V}_0(z)$ , так как  $\bar{V}_0(z) = -V_0(z)|_{\kappa=1}$ . Видно, что форма профиля  $V_0(z)$  при малых  $k_0$  отлична от соответствующей формы при больших  $k_0$ . Если при  $k_0 \gg 1$  профиль монотонный

$$V_0(z) = V_0(0) e^{-2k_0 z},$$

то при уменьшении  $k_0$  он становится немонотонным. Как видно из фиг. 2, при  $k_0 = \pi$ ,  $\kappa = 1,5$  скорость в плоскости симметрии струи отрицательна, на расстоянии порядка  $1/5k_0 = \lambda/10\pi$  от нее скорость

имеет максимальное положительное значение, а на расстоянии  $\sim \lambda/4$  спадает до нуля, как и в случае больших  $k_0$ .

Представление о характере течения вблизи пластины, описываемого полем скоростей  $V_c$ , позволяют составить профили скорости в середине пластины, изображенные на фиг. 2, и распределение скорости  $V_{cx}|_{z=0} = u$  вдоль плоскости пластины, изображенное на фиг. 3 для  $\kappa = 2$  и трех разных  $k_0$ . Отсюда видно, что при всех  $k_0 \geq \pi$  увеличение продольной скорости вдоль поверхности пластины и выход ее на значение  $2V_0(0)$  имеет одинаковый характер; в частности, уже на расстоянии  $1/10$  от задней кромки скорость  $u$  практически совпадает со своим предельным значением.

Трехмерная добавка в поле скоростей при  $k_0 \gg 1$  характеризуется оценкой (5.2); для поперечных компонент подобные оценки получить затруднительно, так как  $\bar{V}_y, \bar{V}_z$  выражаются сложными двумерными интегралами (4.8). Однако вычисления показывают, что при всех  $k_0 \gg \pi$  масштабы  $\bar{V}_y, \bar{V}_z$  существенно меньше масштаба  $\bar{V}_x$  и, по меньшей мере, справедливы неравенства

$$(5.3) \quad |\bar{V}_y| < (1/k_0)|\bar{V}_x|, \quad |\bar{V}_z| < (1/k_0)|\bar{V}_x|$$

для масштабов соответствующих величин.

6. В заключение обратимся к уравнениям, описывающим второй член разложения (3.1):

$$(6.1) \quad \partial V_2 / \partial x = -(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1 - \nabla p_2 + \mathbf{f}_1, \quad \text{div } \mathbf{V}_2 = 0,$$

где  $\mathbf{f}_1 = [\mathbf{E}_1 \times \mathbf{N}] + (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} - \mathbf{N}^2 \mathbf{V}_1$  определяется распределением  $\mathbf{N}$  и решениями  $\mathbf{V}_1, \mathbf{E}_1$  первого приближения. Как и  $\mathbf{V}_1$ , решение  $\mathbf{V}_2$  складывается из плоского векторного поля  $\mathbf{V}_{2c}$ , не зависящего от координаты  $y$ , и периодической по  $y$  добавки, исчезающей после осреднения по этой координате.

Чрезмерная громоздкость выражений  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{f}_1$  делает точное решение выписанных уравнений невозможным, и в связи с этим возникает необходимость обращения к численным методам. Но при использовании численных методов вполне естественно желание избавиться от ограничения  $N \ll 1$  и исследовать задачу в более общей постановке. Однако при этом почти непреодолимым препятствием в общем случае выступает трехмерность исследуемого течения с большими градиентами и возникает вопрос о возможности использования двумерной идеализации для получения осредненных по  $y$  величин.

Частичный ответ на поставленный вопрос можно получить из уравнений (6.1), откуда следует, что при  $k_0 \gg 1$  влияние составляющей  $\bar{V}_e^{2ik_0 y}$  решения первого приближения на искомое решение  $\mathbf{V}_{2c}$  незначительно и, следовательно, двумерная идеализация, по крайней мере с точностью  $O(N^2)$ , описывает нужное решение. Действительно, с учетом (4.1) не за-



висящая от  $y$  составляющая величины  $(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1$  из правой части (6.1) имеет вид

$$[(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1]_c = \left( V_{cx} \frac{\partial V_{cx}}{\partial x} + V_{cz} \frac{\partial V_{cx}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( V_{cx} \frac{\partial V_{cz}}{\partial x} + V_{cz} \frac{\partial V_{cz}}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \left[ \tilde{V}_x \left( \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial x} - 2k_0 \tilde{V}_y \right) + \tilde{V}_z \frac{\partial \tilde{V}_x}{\partial z} \right] \mathbf{e}_x + \left[ \tilde{V}_x \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial x} + \tilde{V}_z \left( \frac{\partial \tilde{V}_z}{\partial z} - 2k_0 \tilde{V}_y \right) \right] \mathbf{e}_z \right\}.$$

Отсюда с учетом оценок (5.2), (5.3) видно, что хотя составляющая  $\tilde{V}_e^{2ik_0 y}$  решения первого приближения в принципе создает рейнольдсовы напряжения, влияющие на поле скоростей  $\mathbf{V}_{2c}$ , однако при  $k_0 \gg 1$  эти напряжения малы по сравнению с членом  $(\mathbf{V}_c \cdot \nabla) \mathbf{V}_c$  (их отношение  $\sim 1/k_0^2$ ) и могут быть отброшены.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хоничев В. И., Яковлев В. И. Движение плоской пластины конечной ширины в проводящей вязкой жидкости, вызванное электромагнитными силами. — ПМТФ, 1980, № 1.
2. Шатров В. И., Яковлев В. И. Изменение гидродинамического сопротивления шара, приводимого в движение электромагнитными силами. — ПМТФ, 1981, № 6.
3. Шатров В. И., Яковлев В. И. О гидродинамическом сопротивлении шара, содержащего источник электромагнитных полей кондукционного типа. — ПМТФ, 1985, № 1.
4. Хоничев В. И., Яковлев В. И. К теории кондукционного МГД-двигателя со свободным полем. — ПМТФ, 1980, № 5.

Поступила 13/II 1984 г.

УДК 532.5

## О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Абрашкин, Е. И. Якубович

(Горький)

Как известно, в двумерной гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости аналитические методы достаточно общего характера были развиты лишь для потенциальных движений, тогда как вихревые течения исследовались для весьма частных случаев [1, 2]. Примерами безграничных плоских потоков с концентрированной завихренностью, допускающих аналитическое описание, являются некоторые системы точечных вихрей — пара вихрей, дорожка Кармана [1], система трех вихрей [3], а также вихрь Кирхгофа, представляющий эллиптическую область однородной завихренности  $\omega$ , вращающуюся с угловой скоростью  $\Omega = \omega AB / (A + B)^2$  ( $A, B$  — полуоси эллипса). Для вихревых течений со свободной границей единственное точное решение получено Герстнером и описывает трохоидальные волны на поверхности бесконечно глубокой жидкости [1].

В данной работе найден такой тип плоских нестационарных бигармонически зависящих от времени вихревых движений жидкости, который включает в себя в качестве частных случаев эллиптический вихрь и волны Герстнера и, так же как потенциальные течения, для решения конкретных задач допускает метод конформных преобразований. Показано, что найденный класс движений в некотором смысле исключителен, а именно: из всех возможных решений в лагранжевых переменных, содержащих конечный набор временных частот, уравнениям гидродинамики удовлетворяет только полученное в работе двухчастотное решение. Этот класс, однако, описывает только такие вихревые течения, для которых можно указать систему отсчета, где траектории жидких частиц остаются локализованными, что не выполняется, например, для сдвигового слоя.

Развитая теория этих течений применяется для исследования самосогласованного взаимодействия вихревой нестационарной области с внешним потенциальным течением.

**1. Основные уравнения.** Уравнения двумерной гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости в переменных Лагранжа хорошо известны. Это уравнение непрерывности

$$(1.1) \quad X_a Y_b - X_b Y_a = S_1(a, b)$$