

УДК 533.6.013.42

## ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ АЭРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ С СИНХРОНИЗАЦИЕЙ ПРИ ПРОТИВОФАЗНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

А. Л. Тукмаков

Институт механики и машиностроения Казанского научного центра РАН, 420111 Казань

Исследуется процесс синхронизации колебаний тонких упругих цилиндрических пластин, образующих стенки канала, заполненного газом. Движение газа описывается системой уравнений Навье — Стокса, для решения которой используется метод Мак-Кормака второго порядка точности. Движение стенок канала описывается системой динамических геометрически нелинейных уравнений теории тонких оболочек, которая решается методом конечных разностей. На границе раздела сред задаются кинематические и динамические контактные условия. В результате проведения численного эксперимента получены сценарии перехода аэроупругой системы к синфазным колебаниям и выявлен режим хаотических колебаний в системе с синхронизацией при противофазном внешнем возбуждении.

**Ключевые слова:** канал с упругими стенками, характеристики колебаний, численный расчет.

Взаимовлияние элементов пространственно связанной аэроупругой системы может приводить к возникновению синхронных динамических режимов [1–3]. Если же элементы динамической системы, имеющей тенденцию к синхронизации, находятся под действием внешнего противофазного возбуждения, то динамика системы может оказаться нерегулярной. В данной работе численно моделируются динамические процессы, приводящие к синхронизации фазы колебаний тонких упругих пластин, образующих участки верхней и нижней стенок плоского канала, заполненного воздухом, исследуются сценарии синхронизации и рассматривается динамика взаимодействующих сред.

**1. Модель и система уравнений.** Рассмотрим заполненный газом плоский канал с упругими на интервале  $-l \leq x \leq l$  и жесткими вне этого интервала верхней и нижней стенками (рис. 1). При несимметричном возбуждении упругих стенок канала одиночными импульсами внешнего давления вначале наблюдаются их колебания с различными амплитудами и фазами. С течением времени возможна синхронизация динамики аэроупругой системы вследствие взаимовлияния стенок канала, осуществляемого через газовую среду.

Для описания движения газа в канале использовалась система уравнений Навье — Стокса для сжимаемого теплопроводного газа [4], записанная в декартовой системе координат:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = 0, \quad (1)$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда научно-исследовательских опытно-конструкторских работ Республики Татарстан (код проекта 05-5.3-214/2003 (Ф)) и в рамках проекта Федеральной целевой программы “Интеграция” (код проекта А0012).

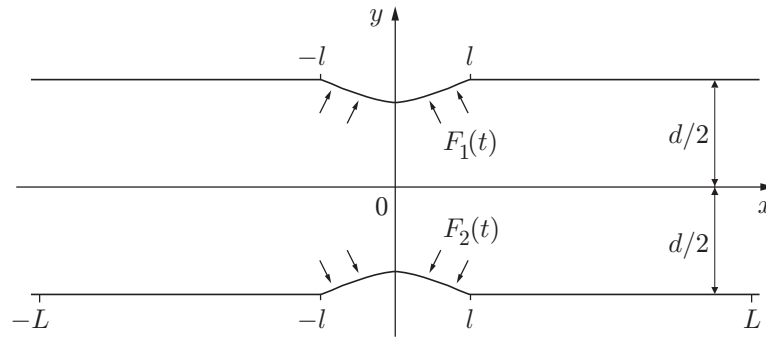


Рис. 1. Схема канала

где

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (e + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (e + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y \end{bmatrix},$$

$$Q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad p = (\gamma - 1)(e - 0,5\rho(u^2 + v^2)),$$

$$\tau_{xx} = \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$u, v$  — компоненты скорости;  $\rho$  — плотность;  $e$  — полная энергия;  $p$  — давление;  $k$  — теплопроводность;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\mu$  — вязкость.

Система (1) в области с изменяющимися границами записывалась в зависящих от времени обобщенных координатах [5] и решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка точности [4]. Переход на следующий временной слой осуществлялся в результате выполнения шагов предиктор и корректор:

$$\mathbf{q}_{j,k}^0 = \mathbf{q}_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\mathbf{F}_{j+1,k}^n - \mathbf{F}_{j,k}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\mathbf{G}_{j,k+1}^n - \mathbf{G}_{j,k}^n),$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}_{j,k}^n + \mathbf{q}_{j,k}^0) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\mathbf{F}_{j,k}^0 - \mathbf{F}_{j-1,k}^0) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\mathbf{G}_{j,k}^0 - \mathbf{G}_{j,k-1}^0).$$

На шаге предиктор производные по  $\xi$ , входящие в величины  $\mathbf{F}_{j+1,k}^n, \mathbf{F}_{j,k}^n$ , заменялись левыми разностями первого порядка точности, на шаге корректор — правыми, производные по  $\eta$  — центральными разностями второго порядка точности. Производные по  $\eta$ , входящие в величины  $\mathbf{G}_{j,k+1}^n, \mathbf{G}_{j,k}^n$ , аппроксимировались левыми разностями первого порядка точности, по  $\xi$  — центральными. Шаг конечно-разностной сетки в физической области  $(x, y)$  по оси  $x$  был постоянным. Вдоль оси  $y$  конечно-разностная сетка содержала постоянное число ячеек с равномерным в каждом сечении шагом. Область  $(\xi, \eta)$  представляла собой единичный квадрат с равномерным разбиением по осям.

Для описания движения упругих участков стенок применялась система динамических геометрически нелинейных уравнений теории тонких оболочек, полученных на основе гипотезы Кирхгофа — Лява [6]:

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} - F_1(V, W) = Z_\tau,$$

$$\frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial W}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^4 W}{\partial \alpha^4} + W - F_2(V, W) = Z_n; \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 F_1 = & -\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} - W\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial W}{\partial \alpha}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} + V\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) + \\
 & + \varepsilon\left(\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} + V\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^3}\right) + \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} + \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} - W\right)\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right)\right) + \\
 & + \varepsilon\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + V\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^3}\right) + \left(1 + \frac{\partial V}{\partial \alpha} - W\right)\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right)\right) \times \\
 & \quad \times \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} + V\right)\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right) - \left(1 + \frac{\partial V}{\partial \alpha} - W\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)\right), \\
 F_2 = & -\varepsilon\frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} - W\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} + V\right)^2 + \\
 & + \varepsilon\left(\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} + V\right)\left(\frac{\partial^4 V}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3}\right) - \right. \\
 & - \left.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} - W\right)\left(\frac{\partial^4 W}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^3}\right)\right) + \\
 & + \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} - W + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} - W\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} + V\right)^2\right) \times \\
 & \quad \times \left(\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} + V\right)\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right) - \left(1 + \frac{\partial V}{\partial \alpha} - W\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)\right).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $W$ ,  $V$  — прогиб и касательное перемещение фиксированных (лагранжевых) точек срединной поверхности, отнесенные к радиусу  $R$  недеформированной панели;  $Z_\tau$ ,  $Z_n$  — касательная и нормальная составляющие динамической нагрузки;  $T^2 = E/(\rho(1 - \nu^2))$ ;  $\varepsilon = \delta^2/12$ ;  $\delta = h/R$ ;  $h$ ,  $\rho$  — толщина и плотность материала панели;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. В уравнении для прогиба слагаемое  $\gamma(\partial W/\partial t)$  описывает конструктивное демпфирование. Величину прогиба считаем положительной в направлении к центру кривизны, касательное перемещение положительно в направлении часовой стрелки (рис. 1). Вдоль продольных кромок пластин (в точках  $x = \pm l$ ) задаются условия жесткой заделки

$$W = 0, \quad V = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_1, \quad \alpha = \alpha_2. \tag{4}$$

Предполагается, что в начальный момент времени упругие стенки неподвижны:

$$W = 0, \quad V = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \tag{5}$$

Нормальная составляющая динамической нагрузки содержит жесткую и следящую составляющие, касательная составляющая равна нулю. Следящий характер определялся избыточным давлением на упругой поверхности. Жесткая составляющая нагрузки задавалась внешним возбуждением  $F(t)$ , равномерно распределенным по поверхности пластины, и не зависела от ее формы:

$$Z_n = F(t) + K(p_0 - p), \quad Z_\tau = 0, \quad F(t) = F_0 t \quad \text{при} \quad t < T_n, \quad F(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq T_n. \tag{6}$$

Здесь  $p$ ,  $p_0$  — текущее и невозмущенное давление газа в моменты времени  $t$  и  $t = 0$ ;  $K = p_0 R(1 - \nu^2)/(Eh)$ ;  $T_n$  — время нарастания импульса внешней нагрузки.

Система (2) с условиями (3)–(6) решалась методом конечных разностей с использованием неявных разностных схем второго порядка точности [7]. При анализе решения системы строился спектр мощности сигнала [1]:

$$|\bar{X}_k|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j \exp\left(-i \frac{2\pi k j}{n}\right) \right|^2,$$

где  $X_j$  — величина прогиба средней точки пластины в момент времени  $t_j = j\Delta t$ ;  $|\bar{X}_k|^2$  — дискретная составляющая спектра мощности, зависящая от частоты;  $\Delta t$  — шаг по времени.

Изменение формы упругих элементов приводило к изменению геометрии расчетной области. На каждом временном шаге выполнялась перестройка конечно-разностной сетки в “физических” переменных  $x, y$  и отображение ее на неподвижную конечно-разностную сетку в “расчетных” переменных  $\xi, \eta$ . Определялись параметры перестройки  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y, x_t, y_t, \xi_t, \eta_t$ , входящие в систему уравнений движения газа, записанную в обобщенных подвижных координатах [5], и по схеме Мак-Кормака осуществлялся переход на следующий временной слой.

На границе раздела сред задавались кинематические и динамические контактные условия. На твердых поверхностях для составляющих скорости газа ставились условия прилипания: в точках на поверхности пластины они полагались равными соответствующим составляющим скорости пластины. На входной и выходной границах канала для продольной составляющей скорости задавались неотражающие граничные условия [8], а для поперечной составляющей — однородные граничные условия второго рода:

$$u_{J,k} = u_0 + \frac{2c_0}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_{J-1,k}}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right), \quad v_{J,k} = v_{J-1,k},$$

$$u_{1,k} = u_0 - \frac{2c_0}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_{2,k}}{p_0} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right), \quad v_{1,k} = v_{2,k}.$$

Здесь  $u_0, c_0, p_0$  — скорость газа, скорость звука в газе и давление в начальный момент времени. Для плотности, энергии, температуры на всех границах расчетной области ставились однородные граничные условия второго рода. В начальный момент времени во внутренних узлах определялись температура, плотность и скорость газа.

Тестирование газодинамической части программного комплекса проводилось путем сравнения результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными [9]. Метод, применяемый для моделирования динамики упругого элемента, рассматривался в работе [7].

Численный эксперимент состоял в моделировании аэроупругих колебаний, возникших при нагружении упругих стенок канала одиночными треугольными импульсами давления, длительность которых была равна половине периода собственных колебаний пластин на нижней резонансной частоте. Расчеты, полученные для канала высотой  $d = 0,15$  м, проводились при следующих значениях параметров упругих панелей: толщина  $h = 0,001$  м, радиус кривизны  $R = 1,5$  м, расстояние между продольными кромками панели  $2l = 0,4$  м, модуль упругости  $E = 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность  $\rho_n = 4500$  кг/м<sup>3</sup>. Число узлов конечно-разностной сетки при решении упругой задачи  $N = 80$ . Для газа, заполняющего канал (воздуха), использовались следующие характеристики: показатель адиабаты  $\gamma = 1,4$ , начальная температура невозмущенного газа  $T_0 = 290$  К, начальная плотность  $\rho_0 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>. Результаты получены на расчетной сетке с параметрами  $N_j = 297, N_K = 40$  ( $N_j, N_K$  — число узлов конечно-разностной сетки в продольном и поперечном направлениях). В сечениях  $x = \pm L$  располагались выходная и входная искусственные границы расчетной области. Временной шаг в расчетах составлял  $\Delta t = 3 \cdot 10^{-8}$  с, длина канала  $2L = 3$  м.

**2. Сценарии синхронизации аэроупругих колебаний.** Если упругие элементы имеют одинаковые параметры, то динамика системы и сценарии ее синхронизации определяются характеристиками внешних возбуждающих импульсов  $F_1(t), F_2(t)$ , действующих на упругие стенки канала.

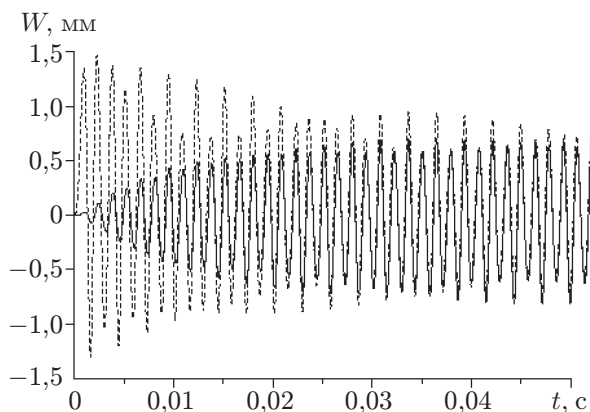


Рис. 2. Синхронизация колебаний панелей при возбуждении системы одним импульсом

Рассмотрим динамический процесс, возникающий в случае приложения импульса внешней нагрузки только к одной из упругих стенок:  $F_1(t) = At$  при  $t < t_n$ ,  $F_1(t) = 0$  при  $t > t_n$ ;  $F_2(t) = 0$ . В этом случае колебания второй стенки возникают за счет аэроупругого взаимодействия. На рис. 2 показаны зависимости прогибов пластин от времени. С течением времени наблюдается уменьшение амплитуды колебаний пластины, к которой был применен внешний импульс давления (энергия ее колебаний затрачивается на раскачивание второй пластины и излучение распространяющихся вдоль канала волн в газе). Рост амплитуды колебаний изначально неподвижной пластины сопровождается уменьшением фазового сдвига. Если в конце первого полупериода колебания пластин смещены по фазе на  $\pi/2$ , то с течением времени разность фаз колебаний уменьшается, и при  $t > 0,04$  с колебания синхронизируются как по амплитуде, так и по фазе (рис. 2). Колебания обеих пластин содержат амплитудную модуляцию с частотой, равной разности частоты первого линейного резонанса газового столба в поперечном направлении ( $f_{11} = 1100$  Гц) и собственной частоты аэроупругих колебаний пластин ( $f = 700$  Гц). Таким образом, при приложении внешнего импульса только к одной из упругих стенок синхронизация происходит при одновременном сближении фаз и амплитуд колеблющихся панелей. Как и в случае колеблющихся плоских пластин [3], при достижении синхронного режима резко уменьшается амплитуда волн давления при продольных колебаниях газа в канале. Если до наступления синхронного режима колебания сопровождаются значительными изменениями объема канала, ограниченного упругими стенками, то синфазным перемещениям стенок соответствуют малые изменения объема канала и уменьшение амплитуд колебаний давления.

Если начальное возбуждение пластин происходит в противофазе при существенно различных интенсивностях внешних импульсов давления, то выравниванию амплитуд колебаний упругих стенок предшествует синхронизация фазы за счет затягивания периода колебаний одной из пластин. На рис. 3 представлены зависимости прогибов пластин от времени при  $F_1(t) = At$ , если  $t < t_n$ , и  $F_1(t) = 0$ , если  $t > t_n$ ;  $F_2(t) = 0,8F_1(t)$ . Процесс синхронизации амплитуд происходит после достижения синфазного режима (рис. 3). После синхронизации амплитуда колебаний пластин оказывается меньше, чем при возбуждении системы одним импульсом.

Если начальное возбуждение пластин происходит в противофазе при близких интенсивностях внешних импульсов давления, то синфазные колебания в системе не возникают. На рис. 4 приведены зависимости прогибов пластин от времени при  $F_1(t) = At$ , если  $t < t_n$ , и  $F_1(t) = 0$ , если  $t > t_n$ ;  $F_2(t) = 0,99F_1(t)$ . В этом случае наблюдается интенсивное затухание колебаний упругих стенок за счет того, что противофазные колебания при аэроупругом взаимодействии гасят друг друга.

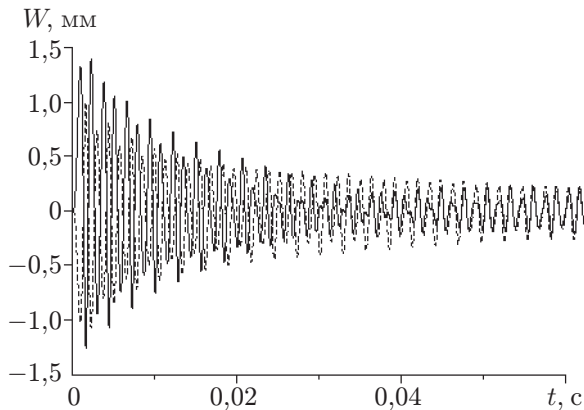


Рис. 3

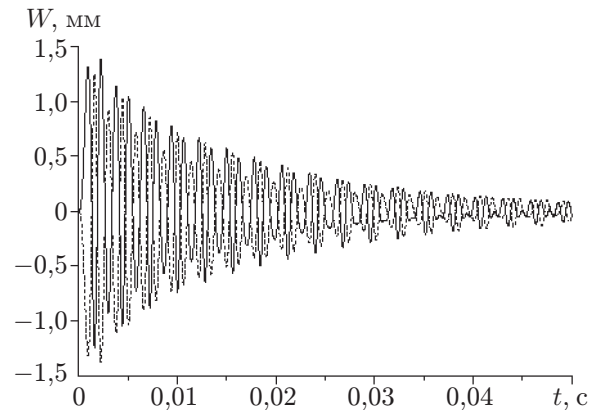


Рис. 4

Рис. 3. Синхронизация колебаний панелей при противофазном возбуждении импульсами различной интенсивности

Рис. 4. Противофазные колебания панелей при возбуждении импульсами близкой интенсивности

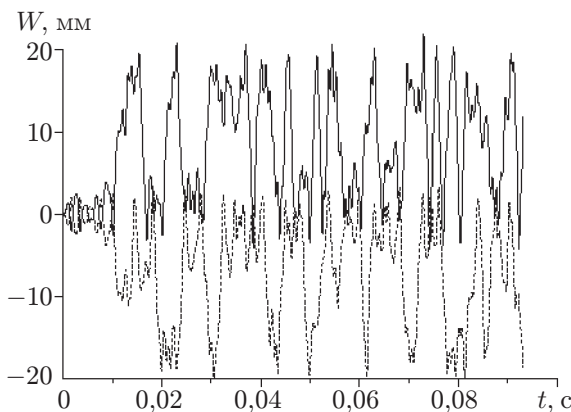


Рис. 5

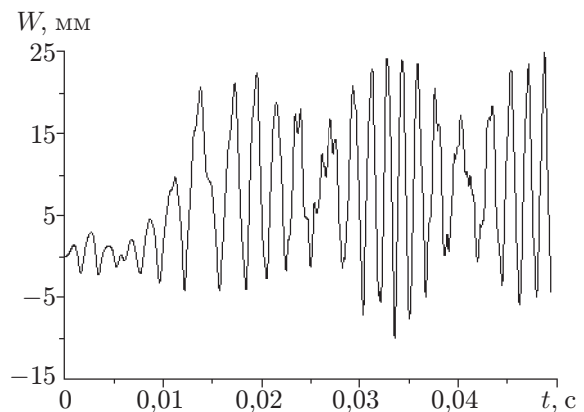


Рис. 6

Рис. 5. Хаотические аэроупругие колебания панелей при противофазном возбуждении

Рис. 6. Колебания панелей без учета аэроупругого взаимодействия при противофазном возбуждении

Таким образом, численное моделирование аэроупругого взаимодействия позволило выявить синхронные динамические режимы, возникающие в системе при начальном несимметричном возбуждении. Для осуществления длительных противофазных аэроупругих колебаний необходим симметричный характер возбуждения.

**3. Динамика системы при стационарном противофазном возбуждении.** Рассмотрим нелинейные колебания, возникающие в канале с упругими стенками при стационарном противофазном возбуждении. Пусть упругие цилиндрические панели находятся под действием равномерно распределенной гармонически изменяющейся во времени внешней нагрузки:  $F_1(t) = F_2(t) = A \sin(2\pi ft)$ . На рис. 5 приведены зависимости прогибов средних точек панелей от времени при критическом значении амплитуды внешней нагрузки  $A$  и частоте нагружения  $f = 500$  Гц. Колебания происходят между двумя положениями рав-

новесия и вследствие неизохронности системы имеют хаотический характер: их спектры мощности содержат протяженные во времени непрерывные участки [10].

На рис. 6 представлены результаты расчета колебаний упругих панелей при той же нагрузке, но без учета аэроупругого взаимодействия (прогиб положителен в направлении к центру кривизны недеформированной панели; сплошная и штриховая кривые совпадают). Видно, что колебания более регулярны и являются колебаниями скорее квазипериодического типа, чем развитого хаотического (рис. 6). Спектр мощности колебаний в этом случае близок к линейчатому: в его составе преобладает составляющая на частоте возбуждения. Аэроупругие колебания помимо крупномасштабных противофазных перемещений содержат более мелкомасштабные синфазные перемещения (рис. 6). Это позволяет сделать вывод о формировании процесса колебаний рассмотренной аэроупругой системы под действием двух факторов — противофазного внешнего возбуждения и стремления системы к установлению синхронного режима, что в результате усложняет динамику и приводит к появлению хаотического режима.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Шустер Г.** Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
2. **Блехман И. И.** Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
3. **Тукмаков А. Л.** Возникновение синфазных колебаний тонких пластин при аэроупругом взаимодействии // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 77–82.
4. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
5. **Steger J. L.** Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries // AIAA J. 1978. V. 16, N 7. P. 679–686.
6. **Муштари Х. М., Галимов К. З.** Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Татгиз, 1957.
7. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.
8. **Ильгамов М. А.** О неотражающих условиях на границах расчетной области // Динамика оболочек в потоке: Тр. семинара. Казань: Казан. физ.-техн. ин-т Казан. филиала АН СССР, 1985. Вып. 18. С. 4–76.
9. **Тукмаков А. Л., Зарипов Р. Г.** Численное моделирование субгармонических колебаний газа в закрытой трубе // Изв. вузов. Авиац. техника. 2001. № 1. С. 64–67.
10. **Тукмаков А. Л.** Нелинейные режимы колебаний упругой панели под действием периодической нагрузки // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 186–191.

*Поступила в редакцию 8/IV 2003 г.*