УДК 532.582.2

РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕШЕТОК ТОНКИХ ПРОФИЛЕЙ С УЧЕТОМ ЭВОЛЮЦИИ ВИХРЕВЫХ СЛЕДОВ

Р. Л. Куляев

(*Новосибирск*)

Исследованию различных аспектов гидродинамического взаимодействия решеток профилей в нелинейной постановке посвящены работы [1—5]: в [1] экспериментально и в [2] теоретически показано, что пелена свободных вихрей при встрече с профилем разрывается; с учетом эволюции вихревых следов проведены расчеты обтекания двух решеток телесных профилей бесконечно малой [3] и конечной [4] густоты; в [5] приведены результаты экспериментального исследования динамических реакций течения на две взаимодвижущиеся решетки тонких профилей.

В данной статье рассматривается интерференция двух решеток тонких профилей в потоке невязкой несжимаемой жидкости, используется модифицированный метод работы [6].

1. В плоскости декартовых координат x, y рассматривается безотрывное обтекание двух решеток тонких профилей потоком невязкой несжимаемой жидкости. Ось y направлена вдоль фронта решеток. Левая решетка предполагается неподвижной, а правая — движущейся вдоль оси y со скоростью $u = \text{const}$. Течение вне профилей и сходящих с них вихревых следов предполагается потенциальным, шаги решеток — одинаковыми, профили — жесткими, а влияние толщины следов и профилей — пренебрежимо малым.

В принятых предположениях скорость течения $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ удовлетворяет уравнениям

$$\text{div}\,\mathbf{V} = 0,\ \text{rot}\,\mathbf{V} = 0,\ (x,\ y) \notin L; \tag{1.1}$$

условию периодичности

$$\mathbf{V}(x,\ y + h,\ t) = \mathbf{V}(x,\ y,\ t) \tag{1.2}$$

и следующим граничным условиям:
непротеканию жидкости через профили решеток

$$\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nu} = \delta_{k2}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu},\ (x,\ y) \in L_{pk},\ k = 1,\ 2; \tag{1.3}$$

непротеканию жидкости через вихревые следы

$$\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nu} = \mathbf{V}_w\cdot\boldsymbol{\nu},\ (x,\ y) \in L_w; \tag{1.4}$$

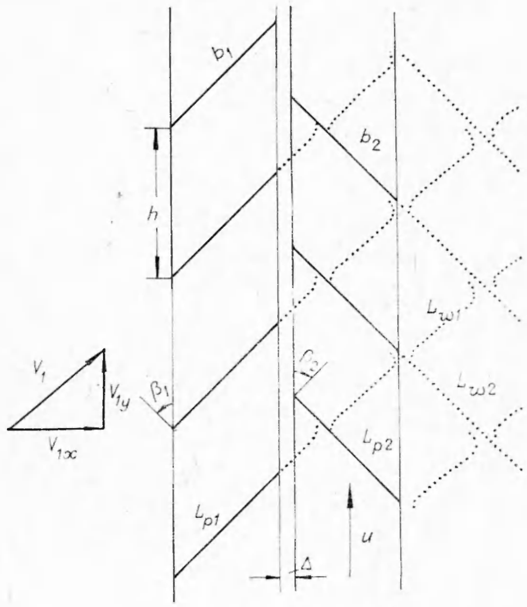
неразрывности давления при переходе через следы

$$[p] = 0,\ (x,\ y) \in L_w; \tag{1.5}$$

неразрывности давления в задних кромках профилей (условие Кутта — Жуковского)

$$[p] \to 0,\ (x,\ y) \to (x_e,\ y_e),\ (x,\ y) \in L_p,\ (x_e,\ y_e) \in E_p; \tag{1.6}$$

затуханию возмущенной скорости течения в бесконечном удалении перед решетками



Фиг. 1

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{V}(x,\ y,\ t) = \mathbf{V}_1. \tag{1.7}$$

Здесь t — время; h — шаг решеток; L_{p1} и L_{p2} — контуры неподвижной и подвижной решеток соответственно (фиг. 1); $L_p = L_{p1} + L_{p2}$; $L_w = L_{w1} + L_{w2}$; L_{w1} и L_{w2} — контуры вихревых следов, сходящих с L_{p1} и L_{p2} соответственно; $L = L_p + L_w$; $\mathbf{v}$ — орт нормали к L; $\mathbf{u} = (0,\ u)$; δ_{k2} — символ Кронекера; $\mathbf{V}_w$ — скорость перемещения линии L_w; p — гидродинамическое давление; E_p — совокупность задних кромок профилей; $\mathbf{V}_1 = (V_{1x},\ V_{1y}) = \text{const}$.

В начальный момент времени предполагается, что вихревые следы отсутствуют и конфигурация решеток задана

$$L|_{t=0} = L_p|_{t=0} = L_{p0}. \tag{1.8}$$

Задача (1.1) — (1.8) нелинейна, поскольку контур $L_w(t)$ заранее неизвестен.

2. Пусть L^0_{pk} — некоторый профиль k-й решетки, выбранный в качестве исходного, L^0_{wk} — контур следа, сходящего с L^0_{pk} $(k = 1, 2)$. Введем величину $\mathbf{v} = (v_x,\ v_y)$ равенством

$$\bar{v}(s, t) = \bar{V}_1 + \frac{1}{2hi} \int\limits_{L^0} \gamma(\sigma, t) \left\{1 + \operatorname{cth} \frac{\pi}{h} [\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)]\right\} d\sigma, \tag{2.1}$$

где $\bar{v} = v_x - iv_y$; $\bar{V}_1 = V_{1x} - iV_{1y}$; s, σ — дуговая абсцисса; $L^0 = L^0_{p1} + L^0_{p2} + L^0_{w1} + L^0_{w2}$; γ — интенсивность вихревого слоя; $\zeta = \xi + i\eta$ — комплексная координата точки контура L^0; интеграл понимается в смысле главного значения Коши. С учетом (2.1) задача (1.1) — (1.8) сводится по аналогии с [6] к задаче относительно функции γ на контуре L^0 и функции ζ на контуре $L^0_w = L^0_{w1} + L^0_{w2}$. При этом предполагается, что каждая точка произвольного элемента $(\sigma'(t),\ \sigma''(t))$ контура L^0_w перемещается со скоростью $\mathbf{v}$, а суммарная интенсивность вихрей на элементе остается неизменной:

$$\int\limits_{\sigma'(t)}^{\sigma''(t)} \gamma(\sigma, t)\, d\sigma = \text{const}. \tag{2.2}$$

Тогда интенсивность сходящих с контура $L^0_p = L^0_{p1} + L^0_{p2}$ свободных вихрей выражается формулой

$$\gamma(l, t) = -\frac{1}{w(l, t)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^l \gamma(\sigma, t)\, d\sigma, \tag{2.3}$$

где l — длина контура L^0_{pk}; σ отсчитывается от передней кромки профиля; w — относительная скорость схода с профиля свободных вихрей, определяемая равенством

$$w(s,\ t) = \mathrm{Re}\{\bar{v}\partial\zeta/\partial s\} - \delta_{k2}u\partial\eta/\partial s,\ k = 1,\ 2. \tag{2.4}$$

С учетом (2.1) условие (1.3) принимает вид

$$\mathrm{Im}\{\bar{v}\partial\zeta/\partial s\} = -\delta_{k2}u\partial\xi/\partial s,\ k = 1,\ 2. \tag{2.5}$$

Начальное условие можно записать в форме

$$L^0|_{t=0} = L^0_p|_{t=0} = L^0_{p0}. \tag{2.6}$$

Отметим, что выполнение граничных условий (1.3), (1.4) и (1.5), (1.6) следует соответственно из (2.5), (2.1) и (2.2), (2.3) и (2.4), а уравнения (1.1) и условия (1.2), (1.7) выполняются автоматически вследствие замены контура L^0 вихревым слоем. Исходя из этого, в дальнейшем рассматриваем задачу (2.1) — (2.6) о движении вихревого слоя L^0.

3. Для численного решения задачи (2.1) — (2.6) используется алгоритм работы [6]. Этот алгоритм основан на линеаризации задачи в малой окрестности каждого момента времени и аппроксимации вихревого слоя системой дискретных вихрей. В алгоритме учтены дополнительно следующие факторы.

Выбор шага по времени Δt. В [6] шаг Δt удовлетворяет условию

$$\Delta t = l/(wN), \tag{3.1}$$

где N — число вихрей на профиле. Условие (3.1) обеспечивало равномерность распределения вихрей в окрестности задней кромки профиля. В рассматриваемой задаче шаг Δt задается заранее постоянным, поскольку условие (3.1) невыполнимо одновременно на обеих решетках. Выбор постоянного Δt приводит к некоторой погрешности в определении интенсивности вихрей на профиле и сходящего с него свободного вихря.

Численное исследование факторов, от которых зависит величина этих погрешностей, привело к следующему результату. В окрестности задней кромки профиля относительная погрешность ε_γ определения интенсивности вихря при $N \geqslant 20$ зависит практически лишь от безразмерного параметра $\tau = l/(wN\Delta t)$ и номера вихря. Пренебрегать этой погрешностью не следует, если $\tau \neq 1$. Например, при $\tau = 1/4$; $1/2$; 1; 2; 6 величина ε_γ для свободного вихря имеет соответственно значения —0,63; —0,28; 0,00; 0,18; 0,36. В соответствии с этим интенсивность вихрей в каждый момент времени вычисляем вначале формально по методу работы [6], игнорируя условие (3.1). Затем определяются параметр τ, соответствующие ему величины ε_γ, и погрешности устраняются.

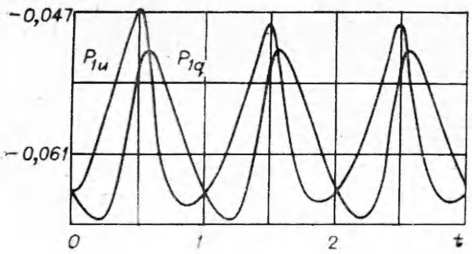
Прохождение второй решетки L_{p2} *через след* L_{w1} *от первой решетки.* В [1] экспериментально и в [2] теоретически показано, что концы разрезанных профилем частей вихревого следа расходятся друг от друга. Тогда интенсивность свободных вихрей в точках соприкосновения следа с профилем должна быть равна нулю (иначе скорость движения этих точек окажется неограниченной, что не имеет физического смысла). Поэтому участками следа L_{w1}, расположенными в малой окрестности профилей решетки L_{p2}, можно пренебречь ввиду малой интенсивности свободных вихрей на этих участках. Теперь для решения задачи можно воспользоваться методом работы [6] при учете того, что система дискретных вихрей дает удовлетворительное приближение поля скоростей вихревого слоя лишь на достаточном от него удалении. В соответствии с этим дискретным вихрям, моделирующим след L_{w1}, не разрешается подходить к профилям решетки L_{p2} на расстояние, меньшее $\varkappa l/N$. Параметр $\varkappa$ выбирается из численного эксперимента таким образом, чтобы гидродинамические реакции потока на профиль L^0_{p2} вычислялись с минимальной погрешностью (обычно $1 \leqslant \varkappa \leqslant 2$). Указанные погрешности минимальны, если при повторном счете задачи с удвоенным числом вихрей на профилях обеих решеток и с уменьшенным вдвое шагом по времени результаты близки к полученным первоначально. Отказ от вышеописанной процедуры (который соответствует значению $\varkappa = 0$) обычно приводит к прохождению свободных вихрей через профиль $L^0{}_{p2}$.

В качестве примера приводятся результаты расчета интерференции решеток для двух случаев. Общим для них является то, что контуры L^0_{p1} и L^0_{p2} прямолинейные, а хорды профилей совпадают с шагом решеток: $b_1 = b_2 = h$ (фиг. 1). Задача рассматривается как в нестационарной постановке (2.1) — (2.6), так и в квазистационарной (без учета вихревых следов). Величины P_{uk} и P_{qk} обозначают соответственно нестационарные и квазистационарные результирующие силы нормального давления потока на профиль L^0_{pk}, N_k — число дискретных вихрей, моделирующих L^0_{pk} $(k = 1, 2)$. В качестве единиц времени и силы принимаются величины h/u и $\rho h u^2$ соответственно (ρ — плотность жидкости).

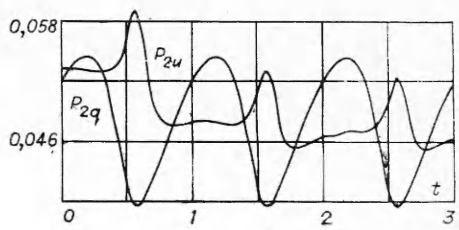
1. Углы выноса решеток $\beta_1 = \pi/4$, $\beta_2 = -\pi/4$, зазор между решетками $\Delta = 0{,}1\,h$, скорость $\mathbf{V}_1 = (0{,}7u \cos 40°,\ 0{,}7u \sin 40°)$, шаг по времени $\Delta t = 1/32$, параметры $N_1 = 20$, $N_2 = 40$, $\varkappa = 1$. Рассчитанная форма вихревых следов, приведенная на фиг. 1 для момента $t = 3$, свидетельствует о том, что след первой решетки L_{w1} испытывает растяжение и деформацию вблизи профилей второй решетки, в то время как след L_{w2} практически не деформируется. При этом концы разрезанных частей следа L_{w1} расходятся друг от друга. Описанные особенности движения вихревых следов согласуются с работами [1 — 4].

Зависимость от времени нестационарных P_{uk} и квазистационарных P_{qk} сил приведена на фиг. 2, 3. Поведение этих сил заметно отличается, особенно на второй решетке. Следует отметить, что аналогичный вариант интерференции решеток, состоящих из симметричных телесных профилей 5%-ной толщины, рассчитан в [4]. В этой работе указывается, что среднее за период значение величин $|P_{u1}|$ и $|P_{u2}|$ составляет соответственно 0,07247 и 0,07154. Эти данные неудовлетворительно согласуются с фиг. 2, 3.

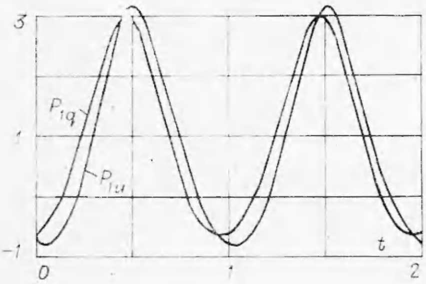
2. Углы выноса $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -\pi/6$; зазор $\Delta = 0{,}2h$; скорость $\mathbf{V}_1 = (7{,}536u,\ 0{,}129u)$; шаг по времени $\Delta t = 1/64$; параметры $N_1 = N_2 = 20$, $\varkappa = 1$. В этом случае отличие в поведении нестационарных и квазистационарных реакций незначительно (фиг. 4, 5). При сравнении фиг. 3 и 5



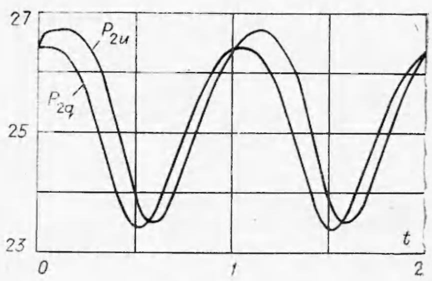
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

выясняется важность безразмерного параметра u/V_{1x} — аналога числа Струхаля в данной задаче.

Автор выражает благодарность Д. Н. Горелову за обсуждение работы.

Поступила 8 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Smith L. H.** Wake dispersion in turbomachines.— «Transactions of the ASME», 1966, vol. 88, Ser. D, N 3. Рус. пер. **Смит Л. Х.** Рассеяние спутной струи в турбомашинах.— «Теор. основы инж. расчетов», 1966, т. 88, сер. Д, № 3.
2. **Inumaru N.** Interference between a wing and a surface of velocity discontinuity.— «Aeronautical Quarterly», 1973, vol. 24, N 3.
3. **Giesing J. P.** Nonlinear interaction of two lifting bodies in arbitrary unsteady motion.—«Transactions of the ASME», 1968, vol. 90, Ser. D, N 3. Рус. пер. **Гизинг Дж.** Нелинейное взаимодействие двух несущих тел в случае произвольного неустановившегося движения.— «Теор. основы инж. расчетов», 1968, т. 90, сер. Д, № 3.
4. **Lienhart W.** Berechnung der instationären Strömung durch gegeneinander bewegte Schaufelgitter und der Schaufelkraftschwankungen. VDI-Forschungsheft, Düsseldorf, VDI — Verlag, 1974, N 562.
5. **Adachi T., Fukusada K., Takahashi N., Nakamoto Y.** Study on the interference between moving and stationary blade rows in axial—flow blower.— «Bulletin of the JSME», 1974, vol. 17, N 109.
6. **Горелов Д. Н., Куляев Р. Л.** Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1971, № 6.

УДК 532.526

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ В ОСЕВОМ ПОТОКЕ

Г. В. Петров

(*Новосибирск*)

Полубесконечный полый цилиндр радиуса R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω и обтекается со скоростью u_∞ однородным потоком несжимаемой жидкости. Течение считается ламинарным и осесимметричным. Для решения задачи используются переменные

(1) $$s = \beta\xi;\ \eta = (r^2 - R^2)/2\xi R^2;$$