

УДК 532.51

ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ НА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛЕНКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩЕЙ ПО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

О. Ю. Цвелодуб

Институт теплофизики СО РАН им. С. С. Кутателадзе, 630090 Новосибирск
E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Изучено течение тонкой пленки вязкой жидкости, стекающей по вертикальной стенке в поле силы тяжести. Значения температур на твердой стенке и свободной поверхности постоянны. Коэффициенты вязкости и температуропроводности являются функциями температуры. Для малых расходов в длинноволновом приближении получено уравнение, описывающее эволюцию возмущений поверхности.

Ключевые слова: пленочное неизотермическое течение, эволюционное уравнение, солитонные решения.

Тонкие пленки жидкости, стекающие в поле силы тяжести, исследуются уже более 50 лет, что обусловлено их использованием в различных технологических процессах.

При рассмотрении изотермических пленок жидкостей в зависимости от параметров исходного невозмущенного течения появляется достаточно большое количество моделей, требующих исследования. В последнее время большой интерес вызывают неизотермические пленки. При этом учет влияния температуры является осложняющим фактором. Поскольку температура оказывает влияние на физические параметры переноса, локальные нагрев и охлаждение способствуют проявлению термокапиллярных эффектов, конденсация или испарение жидкости влияют на геометрию течения и условия на свободной границе, нередко получаются многопараметрические модели, подробный анализ которых затруднен (см., например, [1, 2]).

В данной работе рассматривается течение пленки вязкой жидкости по вертикальной стенке в поле силы тяжести. Зависимостью плотности и теплоемкости от температуры пренебрегается. Значения температуры на твердой стенке и свободной поверхности поддерживаются постоянными. Вязкость и температуропроводность являются некоторыми функциями температуры. При использовании такого подхода удовлетворительно моделируются течения пленок при их испарении или конденсации, когда тепловые потоки не очень велики и изменения толщины пленки незначительны.

Основная цель работы — получение модельного уравнения, позволяющего исследовать волновые режимы течения неизотермических пленок жидкости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение тонкой пленки вязкой жидкости по вертикальной плоскости в поле силы тяжести. Схема течения и принятая система координат показаны на рисунке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 06-08-01501, 07-01-00574) и в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 111.

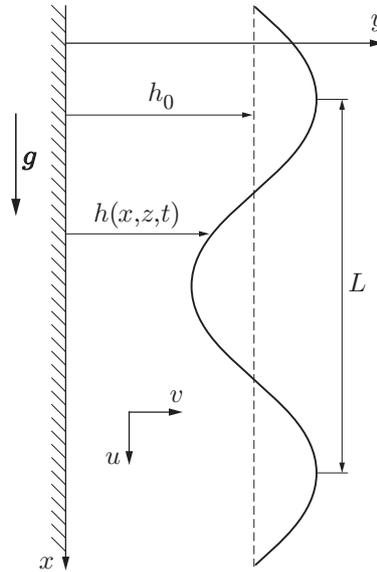


Схема течения

Зависимостями плотности ρ и теплоемкости c жидкости от температуры пренебрегается. Значения температур на твердой стенке T_w и свободной поверхности T_s поддерживаются постоянными. Вязкость μ и температуропроводность a являются некоторыми функциями температуры:

$$\mu = \mu_0 \varphi(\theta), \quad a = a_0 f(\theta).$$

Здесь μ_0 , a_0 — значения вязкости и температуропроводности на свободной границе; $\theta = (T - T_w)/(T_s - T_w)$.

Как известно, течение изотермической вязкой пленки жидкости постоянной толщины даже при очень малых расходах неустойчиво к бесконечно малым возмущениям, а при дальнейшем развитии возмущений становится волновым. Для описания аналогичных режимов в неизотермической вязкой пленке запишем уравнения движения в безразмерном виде. Пусть h_0 — толщина пленки в отсутствие возмущений, U_0 — скорость на свободной поверхности, L — характерный продольный размер возмущения. Тогда, используя величины L/U_0 , U_0 в качестве масштабов времени и скорости, $\mu_0 U_0 / h_0$ — в качестве масштаба компонент тензора напряжений, $\rho g h_0$ — в качестве масштаба давления, а L , h_0 — в качестве масштабов в направлениях x , z и y соответственно, получаем задачу в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Fr}} \left(1 - \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\varepsilon \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\varepsilon \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \\ \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\varepsilon}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\varepsilon \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), \\ \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \varepsilon w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Pe}} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

с условиями на твердой ($y = 0$) и свободной ($y = h(x, z, t)$) границах в виде

$$\begin{aligned} u = v = w = \theta = 0, \quad y = 0, \\ (p - p_0 - \text{We}(K_1 + K_2))n_i - (\text{Fr}/\text{Re})\tau_{ik}n_k = 0, \quad y = h(x, z, t), \\ \theta = 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль осей x, y и z соответственно; p — давление в жидкости; p_0 — внешнее давление (без ограничения общности можно положить $p_0 = 0$); n_i — компоненты вектора нормали

$$\mathbf{n} = \frac{(-\varepsilon h_x, 1, -\varepsilon h_z)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2 + \varepsilon^2 h_z^2}},$$

K_i — безразмерные главные кривизны свободной поверхности:

$$K_1 + K_2 = -\frac{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)\varepsilon h_{zz} - 2\varepsilon^3 h_x h_z h_{xz} + (1 + \varepsilon^2 h_z^2)\varepsilon h_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2 + \varepsilon^2 h_z^2)^{3/2}},$$

нижние индексы у величины h означают дифференцирование по соответствующей переменной; τ_{ik} — безразмерные компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} = 2\varphi(\theta)\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2\varphi(\theta) \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{zz} = 2\varphi(\theta)\varepsilon \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = \varphi(\theta) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \varphi(\theta)\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = \varphi(\theta) \left(\varepsilon \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

В уравнения (1.1)–(1.3) входят следующие параметры: $\varepsilon = h_0/L$, число Рейнольдса $\text{Re} = \rho h_0 U_0 / \mu_0$, число Фруда $\text{Fr} = U_0^2 / (gh_0)$, число Вебера $\text{We} = \sigma / (\rho g h_0^2)$, число Пекле $\text{Pe} = h_0 U_0 / a_0$.

На свободной границе выполняется также кинематическое условие

$$\varepsilon \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + w \frac{\partial h}{\partial z} \right) = v, \quad y = h(x, z, t). \quad (1.4)$$

В отсутствие возмущений задача (1.1)–(1.3) сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Fr}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d}{dy} \left(\varphi(\theta_0) \frac{dU}{dy} \right) = 0, \\ \frac{d}{dy} \left(f(\theta_0) \frac{d\theta_0}{dy} \right) = 0; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$U = \theta_0 = 0, \quad y = 0, \quad (1.6)$$

$$U = \theta_0 = 1, \quad \tau_{xy} = \varphi(\theta_0) \frac{dU}{dy} = 0, \quad y = 1.$$

Для решения этой задачи нужно знать конкретный вид функций $\varphi(\theta_0)$ и $f(\theta_0)$. Решение системы записывается в виде

$$U(y) = \varphi_1(y) / \varphi_1(1).$$

Профиль температуры θ_0 определяется в виде неявной функции:

$$y = f_1(\theta_0)/f_1(1).$$

Здесь

$$\varphi_1(y) = \int_0^y \frac{(1-y) dy}{\varphi(\theta_0)}, \quad f_1(\theta) = \int_0^\theta f(\theta) d\theta.$$

В силу нормировки $U(1) = 1$ имеем $\text{Fr}/\text{Re} = \varphi_1(1)$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением длинноволновых возмущений (т. е. будем полагать $\varepsilon \ll 1$) и будем считать, что числа Рейнольдса достаточно малы: $\text{Re} \simeq 1$.

Для применения метода многих масштабов (см., например, [3]) введем набор быстрых и медленных времен и новые функции:

$$\tau_m = \varepsilon^m t, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ u = U + \varepsilon u', \quad v = \varepsilon^2 v', \quad w = \varepsilon w', \quad p = p_0 + \varepsilon p', \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta', \quad h = 1 + \varepsilon h'.$$

При дальнейшем рассмотрении задачи будем пренебрегать членами высоких порядков по ε . В соответствии с этим функции $\varphi(\theta)$ и $f(\theta)$ можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_0' \theta' + \varepsilon^2 \varphi_0'' \theta'^2 / 2, \quad f = f_0 + \varepsilon f_0' \theta' + \varepsilon^2 f_0'' \theta'^2 / 2.$$

Здесь $\varphi_0 = \varphi(\theta_0)$; $\varphi_0' = d\varphi(\theta)/d\theta$ при $\theta = \theta_0$; $\varphi_0'' = d\varphi_0'/d\theta$ при $\theta = \theta_0$; $f_0 = f(\theta_0)$; $f_0' = df(\theta)/d\theta$ при $\theta = \theta_0$; $f_0'' = df_0'/d\theta$ при $\theta = \theta_0$. Таким образом, значения функций $\varphi(\theta)$, $f(\theta)$ и их производных берутся при значениях функционального аргумента, соответствующих плоскому течению пленки, описываемому задачей (1.5), (1.6).

Пренебрегая членами порядка ε^2 и выше и перенося граничные условия со свободной поверхности на ее невозмущенный уровень (т. е. разлагая все функции по степеням $\varepsilon h'$), получаем систему уравнений (штрихи у возмущенных величин опускаем)

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial \tau_0} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \varphi_0' \frac{dU}{dy} \theta + \varepsilon \left(\varphi_0' \theta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \varphi_0'' \theta^2 \frac{dU}{dy} \right) \right], \\ \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left[\varphi_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \varphi_0' \frac{dU}{dy} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \varphi_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \\ \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial \tau_0} + U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0' \theta \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right], \quad (1.7) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau_0} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{d\theta_0}{dy} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(f_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} + f_0' \theta \frac{d\theta_0}{dy} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(f_0' \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{2} f_0'' \theta^2 \frac{d\theta_0}{dy} \right) \right]$$

с граничными условиями

$$u = v = w = \theta = 0, \quad y = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{h}{\varphi_1} + \varepsilon \left[\varphi_0' \theta \frac{\partial u}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0' \theta \frac{dU}{dy} + \varphi_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad y = 1, \\ p + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} h + \text{We} \varepsilon^2 \Delta h - 2\varepsilon \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad y = 1, \quad (1.8) \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon \left[h \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \varphi_0' \theta \frac{\partial w}{\partial y} \right] = 0, \quad \theta + h \left(\frac{d\theta_0}{dy} + \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0, \quad y = 1.$$

При записи условия (1.8) учтено, что $\varphi_0(1) = f_0(1) = 1$, оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$. В (1.8) оставлены также члены более высокого порядка по ε , так как для тонких пленок жидкостей значения We обычно велики. Поэтому полагаем, что $We \gg 1$, $We \varepsilon^2 \simeq 1$.

Кинематическое условие (1.4) принимает вид

$$h_{\tau_0} + \varepsilon h_{\tau_1} + h_x + \varepsilon u h_x + \varepsilon w h_z = v + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} h, \quad y = 1. \quad (1.9)$$

Решение задачи (1.7), (1.8) будем искать в виде рядов по ε :

$$(u, v, w, p, \theta, h) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m (u^m, v^m, w^m, p^m, \theta^m, h^m). \quad (1.10)$$

Приравнивая в исходной системе уравнений коэффициенты при одинаковых степенях ε к нулю, получаем более простые, чем уравнения (1.7), (1.8), системы, соответствующие разным порядкам ε . Из этих систем для различных порядков возмущений нетрудно получить величины u^m, v^m, w^m, θ^m как функции h^m . Подставляя эти данные в кинематическое условие (1.9), получаем уравнение для возмущения толщины пленки. Так, из уравнений (1.10), (1.7), (1.8) для нулевого порядка имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial u^0}{\partial y} + \varphi'_0 \frac{dU}{dy} \theta^0 \right) &= 0, & \frac{\partial p^0}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial w^0}{\partial y} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{\partial w^0}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial}{\partial y} \left(f_0 \frac{\partial \theta^0}{\partial y} + f'_0 \frac{d\theta_0}{dy} \theta^0 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u^0 = v^0 = w^0 = \theta^0 &= 0, & y &= 0, \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} - \frac{h^0}{\varphi_1} &= 0, & p^0 + We \varepsilon^2 \Delta h^0 &= 0, & \frac{\partial w^0}{\partial y} &= 0, & \theta^0 + f_1 h^0 &= 0, & y &= 1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Решая задачу (1.11), (1.12), для возмущенных величин нулевого порядка получаем выражения

$$\begin{aligned} u^0(x, y, z, t) &= (Re / Fr) \varphi_2 h^0, & v^0(x, y, z, t) &= -(Re / Fr) \varphi_3 h^0, \\ w^0(x, y, z, t) &= 0, & p^0 &= -We \varepsilon^2 \Delta h^0, & \theta^0 &= F_1 h^0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь

$$F_1 = -\frac{f_1(1)y}{f_0(\theta_0(y))}, \quad \varphi_2 = \int_0^y \left(1 - \frac{\varphi'_0}{\varphi_0} F_1(y)(1-y) \right) \frac{dy}{\varphi_0(\theta^0(y))}, \quad \varphi_3 = \int_0^y \varphi_2(y) dy.$$

Подставляя (1.13) в (1.9), получим уравнение, описывающее поведение возмущений в первом приближении:

$$h_{\tau_0}^0 + c_0 h_x^0 = 0, \quad c_0 = 1 + \varphi_3(1)/\varphi_1(1). \quad (1.14)$$

Отсюда следует, что в первом приближении все возмущения распространяются с постоянной скоростью, которая в c_0 раз больше скорости течения на свободной плоской границе:

$$h^0 = h^0(\xi), \quad \xi = x - c_0 \tau_0.$$

Из (1.10), (1.7), (1.8) для следующего порядка по ε получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^0}{\partial \tau_0} + U \frac{\partial u^0}{\partial x} + v^0 \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p^0}{\partial x} &= \\ &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial u^1}{\partial y} + \varphi'_0 \frac{dU}{dy} \theta^1 + \varphi'_0 \theta^0 \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \varphi''_0 \frac{dU}{dy} (\theta^0)^2 \right), \\ \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p^1}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \left[\varphi_0 \frac{\partial^2 u^0}{\partial x \partial y} + \varphi'_0 \frac{dU}{dy} \frac{\partial \theta^0}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial v^0}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p^0}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_0 \frac{\partial w^1}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^0}{\partial \tau_0} + U \frac{\partial \theta^0}{\partial x} + v^0 \frac{d\theta_0}{dy} &= \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial}{\partial y} \left(f_0 \frac{\partial \theta^1}{\partial y} + f'_0 \theta^1 \frac{d\theta_0}{dy} + f'_0 \theta^0 \frac{\partial \theta^0}{\partial y} + \frac{1}{2} f''_0 \frac{d\theta_0}{dy} (\theta^0)^2 \right), \\ u^1 = v^1 = w^1 = \theta^1 &= 0, \quad y = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial y} - \frac{h^1}{\varphi_1} + \varphi'_0 \theta^0 \frac{\partial u^0}{\partial y} = 0, \quad p^1 + \text{We} \varepsilon^2 \Delta h^1 = 2 \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v^0}{\partial y}, \quad y = 1,$$

$$\frac{\partial w^1}{\partial y} = 0, \quad \theta^1 + f_1 h^1 + \frac{\partial \theta^0}{\partial y} h^0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta_0}{dy^2} (h^0)^2 = 0, \quad y = 1.$$

Решая задачу (1.15), с учетом (1.13), (1.14) для возмущений этого порядка имеем

$$\begin{aligned} w^1(x, y, z, t) &= \text{We} \varepsilon^2 U(y) \Delta h_z^0, \\ u^1(x, y, z, t) &= \text{Re} \varphi_7 h_x^0 + \text{We} \varepsilon^2 U(y) \Delta h_x^0 + \varphi_8 (h^0)^2 + (\varphi_2 / \varphi_1(1)) h^1, \\ v^1(x, y, z, t) &= -(\text{Re} \varphi_9 h_{xx}^0 + \text{We} \varepsilon^2 \varphi_{10} \Delta^2 h^0 + 2\varphi_{11} h^0 h_x^0 + (\varphi_3 / \varphi_1(1)) h_x^1), \\ \theta^1 &= \text{Pe} F_2 h_x^0 + F_3 (h^0)^2 + F_1 h^1. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В (1.16) для возмущений h^1 , $v^1(x, y, z, t)$, $u^1(x, y, z, t)$ не приведены слагаемые, относительно которых кинематическое условие инвариантно. Функции F_i , φ_i в этих выражениях определяются следующим образом:

$$F_2 = \frac{1}{f_0(\theta^0(y))} \left(\int_0^y \varphi_4 dy - y \int_0^1 \varphi_4 dy \right), \quad \varphi_4 = \int_0^y \left((U - c_0) F_1 - \frac{\varphi_3 f_1(1)}{\varphi_1(1) f_0} \right) dy,$$

$$F_3 = \frac{1}{f_0(\theta^0(y))} \left(\int_0^y \varphi_5 dy - y \int_0^1 \varphi_5 dy - f_2(1)y \right),$$

$$f_2 = f_1(1) \left[1 + \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2f_0} \right) \right], \quad \varphi_5 = -\frac{1}{2} \left(f'_0 \frac{d(F_1^2)}{dy} + f_1(1) F_1^2 \frac{f''_0}{f_0} \right),$$

$$\varphi_6(y) = \frac{1}{\varphi_1(1)} \left[\frac{1}{\varphi_0(\theta^0(y))} \int_0^y \left((U - c_0) \varphi_2 - \varphi_3 \frac{dU}{dy} \right) dy \right] - \frac{\text{Pe}}{\text{Re}} F_2 \frac{\varphi'_0}{\varphi_0} \frac{dU}{dy},$$

$$\begin{aligned}\varphi_7 &= \int_0^y \varphi_6(y) dy - \varphi_6(1) \int_0^y \frac{dy}{\varphi_0(y)}, \\ \varphi_8 &= - \int_0^y \frac{dy}{\varphi_0(y)} \left[\left(\varphi_0' F_3 + \frac{1}{2} \varphi_0'' F_1^2 \right) \frac{dU}{dy} + F_1 \frac{\varphi_0'}{\varphi_1(1)} \frac{dF_2}{dy} \right], \\ \varphi_9 &= \int_0^y \varphi_7(y) dy, \quad \varphi_{10} = \int_0^y U(y) dy, \quad \varphi_{11} = \int_0^y \varphi_8(y) dy.\end{aligned}$$

2. Модельное уравнение. Подставляя (1.16) в кинематическое условие (1.9) и требуя отсутствия секулярных слагаемых в выражении для h^1 , получаем нелинейное уравнение для определения h^0 :

$$h_{\tau_1}^0 + Ah^0 h_x^0 + \operatorname{Re} \varphi_9(1) h_{xx}^0 + \operatorname{We} \varepsilon^2 \varphi_{10}(1) \Delta^2 h^0 = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $A = 2\varphi_{11}(1) + \varphi_2(1)/\varphi_1(1)$.

Зная h^0 , остальные возмущенные величины в (1.10) до первого порядка включительно можно определить из формул (1.13), (1.16).

Таким образом, уравнение (2.1) описывает эволюцию пространственных возмущений на неизотермической пленке жидкости, стекающей по вертикальной плоскости. Из (1.14) следует, что уравнение (2.1) записано в системе отсчета, движущейся относительно стенки со скоростью c_0 .

Конкретизируем выбор характерного продольного масштаба L . Потребуем, чтобы в уравнении (2.1) модули коэффициентов при третьем и четвертом слагаемых были равны. Тогда для используемого в разложении малого параметра ε имеем

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\operatorname{Re} |\varphi_9(1)|}{\operatorname{We} \varphi_{10}(1)}},$$

и соответственно характерный продольный размер возмущений определяется равенством

$$L = \sqrt{\frac{\operatorname{We} \varphi_{10}(1)}{\operatorname{Re} |\varphi_9(1)|}} h_0.$$

Из этих соотношений следует, что предположение о длинноволновом характере рассматриваемых возмущений, как и в случае изотермических пленок жидкости, справедливо при больших значениях числа Вебера. Кроме того, отношение $\varphi_{10}(1)/|\varphi_9(1)|$ должно быть порядка единицы. Здесь учтено, что безразмерный расход в пленке $\varphi_{10}(1) > 0$. В итоге с помощью замены

$$h = aH, \quad \tau = d\tau_1, \quad a = \operatorname{Re} \varphi_9(1)/(4A), \quad d = \operatorname{Re} \varphi_9(1) \quad (2.2)$$

уравнение (2.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \operatorname{sgn} \varphi_9(1) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 H = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) является характерным примером модельных уравнений, возникающих при исследовании эволюции возмущений в активно-диссипативных средах, в которых бесконечно малые периодические возмущения в зависимости от значения волнового числа

экспоненциально нарастают или затухают. В зависимости от знака $\varphi_9(1)$ уравнение (2.3) представляет собой два уравнения:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 H = 0; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 H = 0. \quad (2.5)$$

Знаки в уравнении (2.3) можно определить, только зная вид зависимостей вязкости μ и температуропроводности a от температуры: $\mu = \mu_0 \varphi(\theta)$, $a = a_0 f(\theta)$.

Отметим, что для плоских волн $H = H(x, \tau)$ уравнения (2.4), (2.5) совпадают с уравнениями, полученными в [4] при исследовании плоских возмущений на двуслойной изотермической пленке. В [4] отмечалось, что одномерный аналог уравнения (2.4) наиболее интересен с точки зрения возможности реализации достаточно сложных волновых решений. В этом случае уравнение (2.4) имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0. \quad (2.6)$$

В настоящее время это уравнение известно как уравнение Курамото — Сивашинского. Для описания пленочных течений оно впервые было получено в [5]. Уравнение (2.6) достаточно подробно исследовано, найдены многие его решения (см., например, [6, 7]).

В случае уравнения (2.5) структура плоских решений проста: все они со временем затухают. Легко показать, что таким же образом ведут себя и пространственные решения уравнения (2.5). Наибольший интерес представляет случай, когда модель приводит к уравнению (2.4). Для изотермических пленок получается именно это уравнение [8]. По-видимому, для типичных зависимостей μ и a от θ уравнение будет тем же.

Таким образом, в рамках используемых приближений для различных зависимостей μ и a от θ описание поведения пространственных возмущений сводится к исследованию решений одного уравнения (2.3). Профили волн подобны и определяются параметрами преобразования (2.2), т. е. их характерные скорости c_0 и коэффициенты в (2.1) зависят от вида μ и a , но сами волны “топологически” подобны: конкретные виды профилей волн для разных моделей могут быть получены друг из друга простым пересчетом. Таким образом имеющаяся в настоящее время информация о волновых решениях уравнения (2.4) при исследовании волновых режимов течения изотермических пленок позволяет представить волновую картину неизотермических течений. Например, систематическое исследование стационарно бегущих решений

$$H = H(\xi, z), \quad \xi = x - c\tau$$

показало, что уравнение (2.4) имеет счетное множество семейств таких решений (см., например, [9, 10]). Наиболее интересным из них является решение в виде уединенной волны, так называемый подковообразный солитон.

Для изотермической пленки жидкости уединенное решение впервые найдено численно в [11]. Экспериментально солитонные режимы для ньютоновской жидкости, количественные характеристики которых согласуются с рассчитанными в [11], получены в [12, 13].

Заключение. Из полученного в данной работе уравнения следует, что в случае малых расходов при моделировании волновых процессов в стекающих неизотермических пленках жидкостей для широкого класса зависимостей вязкости и температуропроводности от температуры можно использовать имеющиеся результаты для изотермических ньютоновских пленок. В частности, в неизотермических пленках должны существовать режимы течений в виде подковообразных солитонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Joo S. W., Davis S. H., Bankoff S. G.** Long-wave instabilities of heated falling films: two-dimensional theory of uniform layers // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 230. P. 117–146.
2. **Трифонов Ю. Я.** Волнообразование при стекании пленки вдоль наклонной плоскости при наличии фазового перехода и касательного напряжения на свободной поверхности // *ПМТФ.* 1996. Т. 37, № 2. С. 109–119.
3. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
4. **Цвелодуб О. Ю.** Об эволюционном уравнении на возмущения в двуслойном пленочном течении // *ПМТФ.* 1990. № 2. С. 57–65.
5. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1974. № 3. С. 28–34.
6. **Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю.** О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде. Новосибирск, 1988. (Препр. / Ин-т теплофизики СО АН СССР; № 188-88).
7. **Tsvlodub O. Yu., Trifonov Yu. Ya.** On steady-state travelling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // *Physica D.* 1989. V. 34. P. 255–269.
8. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений // *Гидродинамика.* Пермь: Перм. гос. ун-т, 1974. Вып. 5. С. 91–104.
9. **Котыченко Л. Н., Цвелодуб О. Ю.** Пространственные волновые режимы на поверхности тонкой вязкой пленки жидкости. Новосибирск, 1991. (Препр. / Ин-т теплофизики СО АН СССР; № 252-91).
10. **Tsvlodub O. Yu., Kotychenko L. N.** Spatial wave regimes on the surface of a thin viscous liquid film // *Physica D.* 1993. V. 63. P. 361–377.
11. **Петвиашвили В. И., Цвелодуб О. Ю.** Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости // *Докл. АН СССР.* 1978. № 6. С. 1261–1263.
12. **Алексеенко С. В., Антипин В. А., Гузанов В. В. и др.** Стационарные уединенные трехмерные волны на вертикально стекающей пленке жидкости // *Докл. РАН.* 2005. Т. 405, № 2. С. 193–195.
13. **Alekseenko S. V., Antipin V. A., Guzanov V. V., et al.** 3-d solitary waves on falling liquid film at low reynolds numbers // *Phys. Fluids.* 2005. V. 17. P. 121704-1–121704-4.

Поступила в редакцию 28/IV 2007 г.
