

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ РАССЛОЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ МНОГОСЛОЙНОГО ВАЛА ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

В. И. Ризов

Университет архитектуры, гражданского строительства и геодезии,
1046 София, Болгария
E-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg

Исследуется расслоение при чистом кручении круглого многослойного вала из функционально-градиентного материала, поведение которого описывается нелинейным соотношением Рамберга — Осгуда. Вал состоит из произвольного числа адгезионно связанных концентрических слоев, в каждом из которых модуль сдвига материала изменяется по экспоненциальному закону как в радиальном направлении, так и в продольном. С использованием уравнения баланса энергии получено выражение для скорости выделения энергии деформации. На основе полученного решения проведено параметрическое исследование расслоения многослойного вала.

Ключевые слова: многослойный круглый вал, функционально-градиентный материал, цилиндрическое расслоение, нелинейный материал, аналитическое решение.

DOI: 10.15372/PMTF20180616

Введение. Функционально-градиентные материалы, появившиеся в 80-х гг. XX в., широко применяются в качестве строительного материала. С использованием материалов с произвольным законом распределения механических свойств по пространственным координатам можно создавать конструкции, работа которых оптимальна при воздействии внешних нагрузок [1–3]. Многослойные функционально-градиентные материалы являются неоднородными материалами с большими отношениями прочности и жесткости к удельному весу. Однако долговечность многослойных конструкций может быть ограничена их расслоением, исследованию которого уделяется большое внимание [4–10].

Влияние градиента температуры на расслоение многослойных балок различной конфигурации из линейно-упругих материалов с учетом остаточных напряжений изучалось в работе [5]. В [6] определена скорость выделения энергии деформации при расслоении многослойных балок при четырехточечном изгибе.

В настоящей работе исследуется расслоение при кручении многослойного вала из функционально-градиентного материала.

1. Математическая формулировка задачи. Изучается расслоение многослойного цилиндрического вала из функционально-градиентного материала (рис. 1). Материал каждого слоя полагается нелинейным. Длина вала равна l . Поперечное сечение вала представляет собой круг радиусом R . Предполагается, что вал состоит из произвольного числа

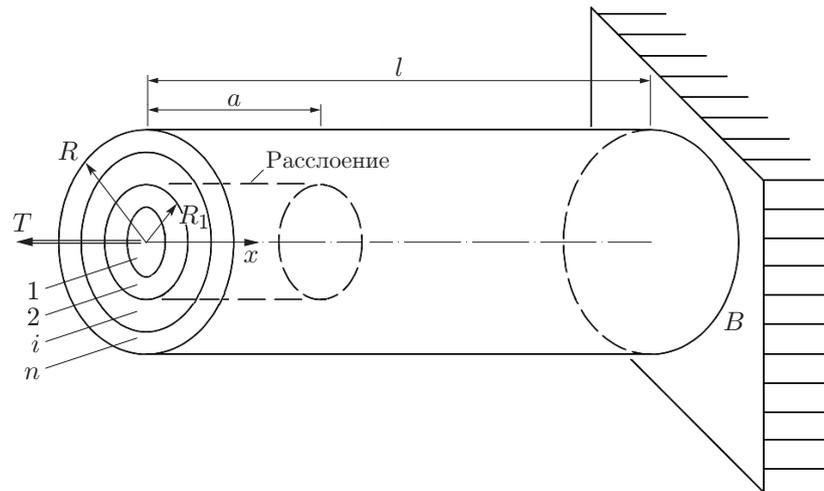


Рис. 1. Схема многослойного круглого вала из функционально-градиентного материала с цилиндрическим расслоением

склеенных слоев различной толщины с различными механическими свойствами. Материал каждого слоя является функционально-градиентным в радиальном и продольном направлениях. Вал заделан в сечении B . Предполагается, что цилиндрическая трещина расслоения длиной a расположена внутри произвольного слоя и делит вал на две консоли. Внутренняя консоль представляет собой круглый вал радиусом R_1 и длиной a , внешняя консоль — кольцеобразный вал с внутренним радиусом R_1 , внешним радиусом R и длиной a . Вал находится в состоянии чистого сдвига под действием крутящего момента T , приложенного к свободному торцу внутренней консоли. Таким образом, внешняя консоль свободна от напряжений.

Пусть G — скорость выделения энергии деформации на единицу площади, длина трещины расслоения увеличивается на малую величину δa . В этом случае уравнение баланса энергии имеет вид

$$T \delta \varphi = \frac{\partial U}{\partial a} \delta a + Gl_{CF} \delta a, \quad (1)$$

где φ — угол поворота свободного торца внутренней консоли; U — энергия деформации, накопленная в вале; l_{CF} — длина фронта трещины расслоения. Подставляя в (1) равенство $l_{CF} = 2\pi R_1$, для скорости выделения энергии деформации получаем следующее выражение:

$$G = \frac{T}{2\pi R_1} \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \frac{1}{2\pi R_1} \frac{\partial U}{\partial a}. \quad (2)$$

Угол поворота свободного торца внутренней консоли вычисляется по формуле

$$\varphi = \int_0^a \frac{\gamma_h}{R_1} dx + \int_a^l \frac{\gamma_{UNh}}{R} dx, \quad (3)$$

где γ_h , γ_{UNh} — деформации сдвига на внешних поверхностях внутренней консоли и неповрежденной (без трещины) части вала ($a \leq x \leq l$) соответственно. Ось x направлена вдоль вала (см. рис. 1). Равенство (3) можно получить, используя интеграл Максвелла — Мора

$$\varphi = \int_0^a \frac{M_{1t} \gamma_h}{R_1} dx + \int_a^l \frac{M_{1t} \gamma_{UNh}}{R} dx,$$

где $M_{1t} = 1$ — единичный крутящий момент, приложенный к свободному торцу внутренней консоли.

Выражение для энергии деформации можно записать в следующем виде:

$$U = U_{DL} + U_{UN} \quad (4)$$

(U_{DL} , U_{UN} — энергия деформации внутренней консоли и неразрушенной части вала соответственно). Поскольку внешняя консоль свободна от напряжений, энергия ее деформации равна нулю. Энергия деформации внутренней консоли вычисляется по формуле

$$U_{DL} = \sum_{i=1}^{i=n_1} \int_0^a \int_{r_i}^{r_{i+1}} u_{0DL_i} dx dr, \quad (5)$$

где n_1 — число слоев во внутренней консоли; u_{0DL_i} — плотность энергии деформации в i -м слое; r_i , r_{i+1} — радиусы внутренней и внешней поверхностей i -го слоя. Энергия деформации неразрушенной части вала определяется по формуле

$$U_{UN} = \sum_{i=1}^{i=n} \int_a^l \int_{r_i}^{r_{i+1}} u_{0UN_i} dx dr \quad (6)$$

(n — число слоев в неразрушенной части вала; u_{0UN_i} — плотность энергии деформации в i -м слое).

Предполагается, что напряжения и деформации в каждом слое связаны соотношениями Рамберга — Осгуда

$$\gamma_i = \frac{\tau_i}{D_i} + \left(\frac{\tau_i}{H_i} \right)^{1/m_i}, \quad (7)$$

где γ_i , τ_i — деформация и напряжение сдвига в i -м слое соответственно; D_i — модуль сдвига; H_i , m_i — константы материала в i -м слое.

Распределение по радиусу модуля сдвига D_i в i -м слое описывается экспоненциальным законом

$$D_i = D_{L_i} e^{q_i(r-r_i)/(r_{i+1}-r_i)} \quad (8)$$

(D_{L_i} — значение D_i на внутренней поверхности слоя; q_i — константа материала, определяющая величину градиента D_i в радиальном направлении; радиус r изменяется в диапазоне $[r_i; r_{i+1}]$). Величина D_{L_i} изменяется вдоль вала по экспоненциальному закону

$$D_{L_i} = D_{LF_i} e^{q_{H_i}x/l}, \quad (9)$$

где D_{LF_i} — значение D_{L_i} на внешнем торце вала; q_{H_i} — константа материала, определяющая величину градиента D_{L_i} в продольном направлении в i -м слое; значение координаты x изменяется в диапазоне $[0; l]$.

Если напряжения и деформации связаны соотношением Рамберга — Осгуда, то плотность энергии деформации в i -м слое вычисляется по формуле [9]

$$u_{0DL_i} = \frac{\tau_i^2}{2D_i} + \frac{\tau_i^{(1+m_i)/m_i}}{(1+m_i)H_i^{1/m_i}}. \quad (10)$$

Подставляя (8) в (10), получаем

$$u_{0DL_i} = \frac{\tau_i^2}{2D_{L_i} e^{q_i(r-r_i)/(r_{i+1}-r_i)}} + \frac{\tau_i^{(1+m_i)/m_i}}{(1+m_i)H_i^{1/m_i}}. \quad (11)$$

Формулу (11) можно использовать для вычисления величины u_{0UN_i} . Для этого распределение напряжения сдвига τ_i нужно заменить распределением напряжения сдвига в i -м слое неразрушенной части вала τ_{UN_i} .

Поскольку из формулы (7) невозможно получить явную формулу для определения напряжения сдвига τ_i , для определения распределения напряжения сдвига в i -м слое внутренней консоли используется разложение в ряд Тейлора с удержанием первых трех членов:

$$\tau_i(r) \approx \tau_i(r_{ai}) + \frac{\tau_i'(r_{ai})}{1!} (r - r_{ai}) + \frac{\tau_i''(r_{ai})}{2!} (r - r_{ai})^2. \quad (12)$$

Здесь $r_{ai} = (r_i + r_{i+1})/2$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (для первого члена $r_{ai} = 0$). Формулу (12) запишем в виде

$$\tau_i(r) \approx \psi_i + \lambda_i(r - r_{ai}) + \theta_i(r - r_{ai})^2, \quad (13)$$

где коэффициенты ψ_i , λ_i , θ_i определяются следующим образом. Так как длина вала значительно больше его диаметра, деформация сдвига на отрезке $0 \leq r \leq R_1$ представляется в виде функции координаты r с использованием гипотезы плоских сечений:

$$\gamma = \frac{r}{R_1} \gamma_h. \quad (14)$$

Подставляя (8), (13), (14) в (7), получаем

$$\frac{\gamma_h}{R_1} r = \frac{\psi_i + \lambda_i(r - r_{ai}) + \theta_i(r - r_{ai})^2}{D_{L_i} e^{\mu_i r - \nu_i}} + \frac{[\psi_i + \lambda_i(r - r_{ai}) + \theta_i(r - r_{ai})^2]^{1/m_i}}{H_i^{1/m_i}}, \quad (15)$$

где

$$\mu_i = \frac{q_i}{r_{i+1} - r_i}, \quad \nu_i = \frac{q_i r_i}{r_{i+1} - r_i}. \quad (16)$$

Полагая в (15) $r = r_{ai}$, находим

$$\eta_i r_{ai} \nu_i = \psi_i + \phi_i \psi_i^{1/m_i} \nu_i, \quad (17)$$

где

$$\eta_i = \frac{\gamma_h}{R_1} D_{L_i}, \quad \phi_i = \frac{D_{L_i}}{H_i^{1/m_i}}, \quad \nu_i = e^{\mu_i r_{ai} - \nu_i}. \quad (18)$$

Дифференцируя (15) по r и подставляя в полученное выражение $r = r_{ai}$, имеем

$$\eta_i \nu_i (1 + r_{ai} \mu_i) = \lambda_i + \frac{\phi_i}{m_i} \psi_i^{(1-m_i)/m_i} \lambda_i \nu_i + \phi_i \psi_i^{1/m_i} \nu_i \mu_i. \quad (19)$$

Подставляя $r = r_{ai}$ в выражение для второй производной от выражения (15) по r , получаем

$$\begin{aligned} \eta_i \mu_i \nu_i (2 + \mu_i r_{ai}) &= 2\theta_i + \left(\phi_i \frac{1 - m_i}{m_i} \psi_i^{(1-2m_i)/m_i} \lambda_i^2 + 2\phi_i \frac{\theta_i}{m_i} \psi_i^{(1-m_i)/m_i} \right) \nu_i + \\ &+ \phi_i \frac{\lambda_i}{m_i} \psi_i^{(1-m_i)/m_i} \mu_i \nu_i + \phi_i m_i \psi_i^{(1-m_i)/m_i} \lambda_i \nu_i \mu_i + \phi_i \psi_i^{1/m_i} \mu_i^2 \nu_i. \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношения (17), (19), (20) можно записать для каждого слоя. Для первого слоя в этих выражениях нужно положить $r_{ai} = 0$. В результате имеем $3n$ уравнений относительно

$3n + 1$ неизвестных $\gamma_h, \psi_i, \lambda_i, \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Еще одно уравнение получаем, записав уравнение равновесия для произвольного поперечного сечения внутренней консоли с координатой x :

$$T = \sum_{i=1}^{i=n_1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} 2\pi\tau_i r^2 dr. \quad (21)$$

Подставляя (13) в (21), находим

$$T = 2\pi \sum_{i=1}^{i=n_1} \left(\frac{\psi_i}{3} \omega_{gi} + \frac{\lambda_i}{4} \omega_{di} - \frac{\lambda_i}{3} r_{ai} \omega_{gi} + \frac{\theta_i}{5} (r_{i+1}^5 - r_i^5) - \frac{\theta_i}{2} r_{ai} \omega_{di} + \frac{\theta_i}{3} r_{ai}^2 \omega_{gi} \right), \quad (22)$$

где $\omega_{gi} = r_{i+1}^3 - r_i^3$; $\omega_{di} = r_{i+1}^4 - r_i^4$. В результате имеем $3n + 1$ уравнений относительно $3n + 1$ неизвестных. Эти уравнения решаются относительно неизвестных $\gamma_h, \psi_i, \lambda_i, \theta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) с использованием программ пакета MATLAB. Следует отметить, что, поскольку в соответствии с (9) величина D_{L_i} является функцией координаты x , из уравнений (17), (19), (20), (22) можно определить величины $\gamma_h, \psi_i, \lambda_i, \theta_i$ для любого поперечного сечения внутренней консоли на отрезке $[0; a]$.

С использованием формул (14), (17)–(20), (22) можно определить величину γ_{UNh} и распределение напряжений сдвига τ_{UN_i} в i -м слое для любого поперечного сечения неразрушенной части вала. Для этого величины γ_h, R_1, n_1 нужно заменить на величины γ_{UNh}, R, n соответственно.

Подставляя (3)–(6) в (2), получаем

$$G = \frac{T}{2\pi R_1} \left(\frac{\gamma_h}{R_1} - \frac{\gamma_{UNh}}{R} \right) - \frac{1}{2\pi R_1} \left(\sum_{i=1}^{i=n_1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} u_{0DL_i} dr - \sum_{i=1}^{i=n} \int_{r_i}^{r_{i+1}} u_{0UN_i} dr \right), \quad (23)$$

где величины $\gamma_h, \gamma_{UNh}, u_{0UN_i}, u_{0DL_i}$ определяются из уравнений (14), (17), (19), (20), (22) при $x = a$. Интегралы в (23) вычисляются с использованием программ пакета MATLAB.

Для того чтобы проверить равенство (23), скорость выделения энергии деформации можно вычислить по формуле [8]

$$G = \frac{1}{2\pi R_1} \frac{dU^*}{da}, \quad (24)$$

где dU^* — приращение дополнительной энергии деформации при элементарном приращении длины da трещины расслоения. Дополнительную энергию деформации U^* , накопленную в вале, можно вычислить, используя формулы (4)–(6). Для этого величины u_{0DL_i} и u_{0UN_i} нужно заменить на плотности дополнительной энергии деформации $u_{0DL_i}^*$ и $u_{0UN_i}^*$ соответственно. Плотность дополнительной энергии деформации в i -м слое внутренней консоли вычисляется по следующей формуле [9]:

$$u_{0DL_i}^* = \tau_i \gamma - u_{0DL_i}. \quad (25)$$

Подставляя (7), (11) в (25), получаем

$$u_{0DL_i}^* = \frac{\tau_i^2}{2D_{L_i} e^{q_i(r-r_i)/(r_{i+1}-r_i)}} + \frac{m_i \tau_i^{(1+m_i)/m_i}}{(1+m_i) H_i^{1/m_i}}. \quad (26)$$

Формулу (26) можно использовать также для вычисления плотности дополнительной энергии в i -м слое неразрушенной части вала. Для этого величину τ_i нужно заменить на величину τ_{UN_i} . Значения скорости выделения энергии деформации, вычисленные по формулам (24) и (23), совпадают, что подтверждает достоверность предложенного в данной

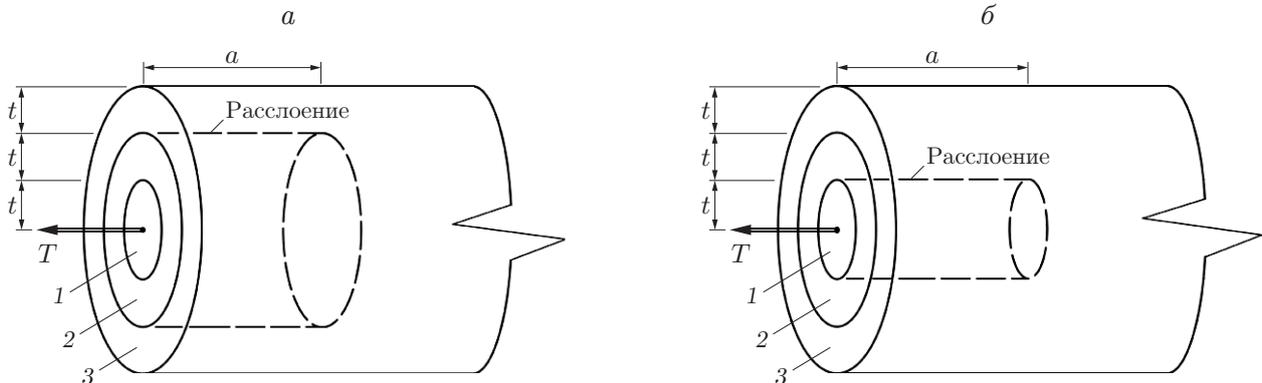


Рис. 2. Схемы трехслойного круглого вала из функционально-градиентного материала с цилиндрическим расслоением:

a — расслоение между вторым и третьим слоями, b — расслоение между первым и вторым слоями; 1–3 — номера слоев

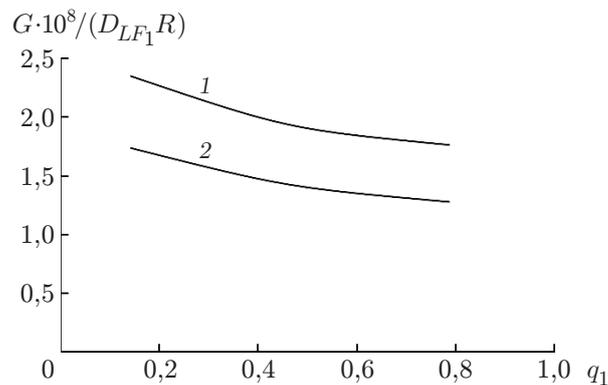


Рис. 3. Зависимость безразмерной скорости выделения энергии деформации от параметра q_1 :

1 — расслоение между первым и вторым слоями, 2 — расслоение между вторым и третьим слоями

работе метода исследования расслоения при кручении многослойного вала. Следует отметить, что расслоение вала исследовалось также с использованием разложения Тейлора, в котором удерживалось более трех членов. При этом результаты вычислений отличались от результатов, полученных с использованием разложения Тейлора, в котором удерживалось три члена, не более чем на 3 %.

2. Параметрический анализ. Вычисления скорости выделения энергии деформации с использованием формулы (23) выполнены с целью исследования влияния градиента механических свойств материала в радиальном и продольном направлениях на процесс расслоения, в частности на положение и длину трещины расслоения. При представлении результатов вычислений используется безразмерная скорость выделения энергии деформации $G_N = G / (D_{LF1} R)$. Исследовались два случая расслоения в трехслойном валу: расслоения между вторым и третьим слоями (рис. 2, a) и расслоения между первым и вторым слоями (рис. 2, b). В обоих случаях толщина каждого слоя равна t . Задача решалась при следующих значениях параметров: $T = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $t = 0,005 \text{ м}$, $l = 0,6 \text{ м}$, $a/l = 0,7$.

На рис. 3 приведена зависимость скорости выделения энергии деформации от параметра q_1 ($D_{LF2}/D_{LF1} = 0,7$, $D_{LF3}/D_{LF1} = 0,9$, $H_1/D_{LF1} = 0,5$, $H_2/H_1 = 0,8$, $H_3/H_1 = 0,6$,

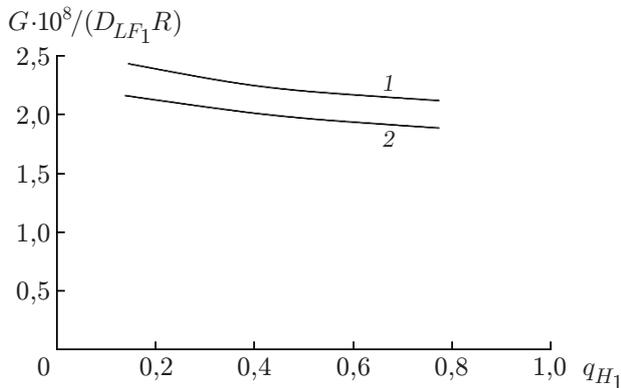


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость скорости выделения энергии деформации от параметра q_{H_1} :
1 — нелинейный материал, 2 — линейный материал

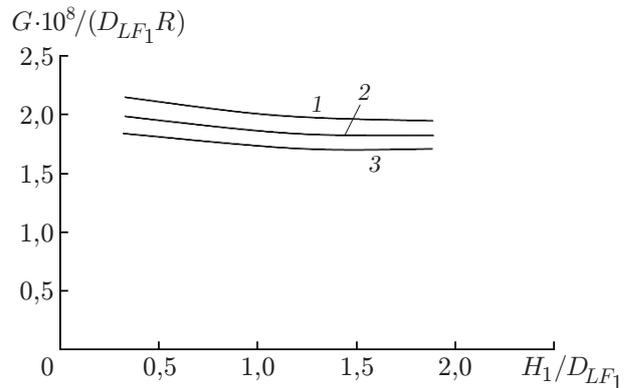


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения H_1/D_{LF_1} для случая расслоения, показанного на рис. 2, б:
1 — $a/l = 0,3$, 2 — $a/l = 0,5$, 3 — $a/l = 0,7$

$q_2/q_1 = 0,7$, $q_3/q_1 = 1,1$, $q_{H_1}/q_1 = 0,3$, $q_{H_2}/q_{H_1} = 0,4$, $q_{H_3}/q_{H_1} = 0,5$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0,8$. С увеличением параметра q_1 скорость выделения энергии деформации уменьшается, что объясняется увеличением жесткости вала. В первом случае расслоения (см. рис. 2, а) скорость выделения энергии деформации больше, чем во втором случае. Это обусловлено тем, что в первом случае радиус внутренней консоли меньше.

На рис. 4 приведена зависимость скорости выделения энергии деформации от параметра q_{H_1} в случае расслоения между первым и вторым слоями (см. рис. 2, б). Видно, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением параметра q_{H_1} . Кривая 2 на рис. 4 соответствует линейно-упругому материалу вала. Решение, соответствующее линейно-упругому материалу вала, можно получить, положив в соотношении (23) $H_i \rightarrow \infty$. В этом случае соотношение Рамберга — Осгуда (7) переходит в закон Гука, в котором D_i — модуль сдвига в i -м слое. В случае нелинейного материала скорость выделения энергии деформации больше.

На рис. 5 для случая расслоения, показанного на рис. 2, б, приведена зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения H_1/D_{LF_1} при различных значениях отношения a/l . Скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения H_1/D_{LF_1} . Из рис. 5 также следует, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения a/l , поскольку в поперечном сечении, в котором находится трещина расслоения, величина D_{LF_1} (см. (9)) увеличивается с увеличением длины этой трещины.

Заключение. Исследовано расслоение в многослойном (число слоев произвольное) круглом валу при его кручении. Материал каждого слоя является нелинейным функционально-градиентным, его поведение описывается соотношениями Рамберга — Осгуда. Модуль сдвига материала в радиальном и осевом направлениях изменяется по экспоненциальному закону. С использованием уравнения энергетического баланса получено аналитическое выражение для скорости выделения энергии деформации. Решение получено для произвольного случая расслоения между концентрическими цилиндрическими слоями.

Установлено, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением параметров q_1 и q_{H_1} , определяющих величину градиентов механических свойств материала в радиальном и продольном направлениях в первом слое. Установлено также, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением толщины внутренней консоли, отношения H_1/D_{LF_1} и отношения a/l .

Результаты анализа, полученные в данной работе, могут быть использованы при проектировании многослойных валов из функционально-градиентных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nemat-Allal M. M., Ata M. H., Bayoumi M. R., Khair-Eldeen W.** Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of Aluminum/Steel functionally graded material // Materials Sci. Appl. 2011. V. 2. P. 1708–1718.
2. **Bohidar S. K., Sharma R., Mishra P. R.** Functionally graded materials: A critical review // Intern. J. Res. 2014. V. 1. P. 289–301.
3. **Uslu Uysal M.** Buckling behaviors of functionally graded polymeric thin-walled hemispherical shells // Steel Composite Structures. Intern. J. 2016. V. 21. P. 849–862.
4. **Guadette F. G., Giannopoulos A. E., Suresh S.** Interfacial cracks in layered materials subjected to a uniform temperature change // Intern. J. Fracture. 2001. V. 28. P. 5620–5629.
5. **Narin J. A.** On the calculation of energy release rates for cracked laminates with residual stresses // Intern. J. Fracture. 2006. V. 139. P. 267–293.
6. **Hsueh C. H., Tuan W. H., Wei W. C. J.** Analyses of steady-state interface fracture of elastic multilayered beams under four-point bending // Scripta Materialia. 2009. V. 60. P. 721–724.
7. **Szekrenyes A.** Fracture analysis in the modified split-cantilever beam using the classical theories of strength of materials // J. Phys.: Conf. Ser. 2010. V. 240. 012030.
8. **Rizov V. I.** Elastic-plastic fracture of functionally graded circular shafts in torsion // Adv. Materials Res. 2016. V. 5. P. 299–318.
9. **Rizov V. I.** Delamination analysis of a layered elastic-plastic beam // Intern. J. Structur. Integrity. 2017. V. 4. P. 516–529.
10. **Rizov V. I.** Delamination in a two-dimensional functionally graded beam // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2018. V. 59, N 1. P. 146–152.

*Поступила в редакцию 7/II 2018 г.,
в окончательном варианте — 2/IV 2018 г.*
