

О ТУРБУЛЕНТНОМ СМЕШЕНИИ СПУТНЫХ И ВСТРЕЧНЫХ ПОТОКОВ

*Л. А. Вулис, А. Д. Лебедев, Л. И. Неймотин**(Ленинград)*

Решение задачи о крае свободной турбулентной струи, полученное в [1], исходя из модели вихревого движения идеальной жидкости, обобщается на случай турбулентного смешения двух плоских полуограниченных (спутных или встречных) потоков несжимаемой жидкости. Показано, что результаты расчета находятся в качественном согласии с опытными данными и близки к ним количественно. Обсуждаются некоторые особенности метода.

1. В [1] приведено аналитическое решение задачи о двухмерном турбулентном смешении плоского однородного потока с неподвижной жидкостью (задача о «крае струи» в теории турбулентных струй [2]). Исходной для построения теории в [1] служила модель вихревого движения идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости.

Аналогия между таким движением и развитым (в среднем установившемся) турбулентным течением известна давно ([3], стр. 271).

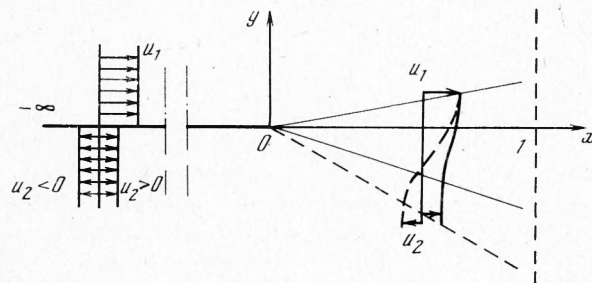
В [1] авторы не оставляют без внимания вопрос о происхождении вихрей и берут его за основу физической модели слоя смешения, образующегося при распаде неустойчивого тангенциального разрыва скорости на множество дискретных вихрей. Осредняя по времени актуальные значения скорости нестационарного потенциального движения потока жидкости, в котором движутся обособленные вихри, авторы наделяют модель основными свойствами осредненного турбулентного движения, в частности «потерей памяти» по отношению к начальному состоянию. Этот прием — переход к осредненному, независящему от случайных начальных условий течению — является приближением на пути к прямому расчету турбулентного движения путем решения и последующего осреднения нестационарных уравнений Навье — Стокса. В принятой модели удается отразить три характерных отрицательных признака актуального турбулентного движения — его нестационарность, нелинейность и нерегулярность, и придать осредненному течению типичные статистические свойства — стационарность, непрерывность и упорядоченность.

Пренебрежение влиянием вязкости допустимо для развитого свободного турбулентного движения вдали от твердых стенок и для той области диссипация.

Решение задачи, полученное в [1], и его расчетные иллюстрации — относительные профили продольной компоненты скорости и ее дисперсии — свидетельствуют о качественном согласии с экспериментом. Количественно близки к опытным отдельные результаты расчета (по порядку величины пульсаций скорости $\langle u'^2 \rangle$, значению относительной скорости $\langle u \rangle / u_1 \approx 0.7$ на продолжении линии раздела и др.). Представляет интерес более полное рассмотрение предложенной модели и сопоставление результатов решения с опытными данными, в частности дополнение расчета продольной компоненты скорости расчетом поперечной (средней и пульсационной) компоненты скорости, определение присущего модели значения

турбулентного напряжения трения, корреляций и их распределений в поле течения.

Выполним это на примере задачи о свободном турбулентном смешении двух однородных, плоскопараллельных, спутных или встречных потоков несжимаемой жидкости [2]. Частным случаем этой задачи является задача о крае струи [1]. Рассмотрение спутных потоков позволит сравнить модель и эксперимент по подробно изученному в опытах влиянию параметра спутности m (отношению скоростей потоков $m = u_2 / u_1$ (см. фиг. 1))



Фиг. 1

на характеристики слоя смешения. Обобщение задачи на встречные течения представляет интерес с точки зрения сопоставления расчета с приближенными результатами, полученными в рамках теории пограничного слоя, т. е. для параболических уравнений [2].

2. Схематически (фиг. 1) задача о турбулентном смешении спутных или встречных потоков сводится к следующему. По обе стороны тонкой полубесконечной пластины движутся с разными скоростями два однородных плоскопараллельных потока несжимаемой жидкости. Пренебрежем трением жидкости о пластину, т. е. не будем учитывать влияние пристенного пограничного слоя вблизи поверхности. Пластину совместим с осью x в области $x < 0$, а ее кромку — с началом координат. Начиная от этой точки ($x = 0, y = 0$), разделенные потоки (для определенности будем говорить о спутном течении) приходят в соприкосновение. Вследствие неустойчивости границы раздела (тангенциального разрыва скорости) по отношению к малым возмущениям в правой полуплоскости образуется клинообразная область смешения. Для свободного течения невязкой жидкости в условиях задачи отсутствует характерный размер. Поэтому можно ожидать, и это подтверждается опытом для задач свободной турбулентности, автомодельности развитого осредненного течения. Это означает, что относительные значения осредненной скорости

$$\frac{\langle u \rangle}{u_1} = f\left(\frac{y}{x}, m\right) \quad \left(\langle u \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} u(t) dt \right)$$

универсальны и зависят от отношения координат y/x (но не от y и x в отдельности).

Для математической постановки задачи сформулируем граничные условия. Будем считать заданными значения скорости потоков на границах области

$$\begin{aligned} u &= u_1 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, y > 0, \quad -\infty < x < +\infty, y \rightarrow +\infty \\ u &= u_2 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, y < 0, \quad -\infty < x < +\infty, y \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Зададим разрыв скорости на линии тока $y = 0$, имитирующей в левой полуплоскости пластину

$$u(x, +0) - u(x, -0) = u_1 - u_2, \quad v(x, +0) - v(x, -0) = 0$$

В качестве замыкающего расчетную область условия примем, следуя [1], что на условной границе потока на расстоянии L от кромки пластины течение параллельно оси x , т. е.

$$v(x, y, t) = 0 \quad \text{при } x = L, \quad -\infty < y < +\infty$$

Искусственное ограничение длины области смещения связано с включением в условия задачи масштаба длины L , отсутствующего в физической постановке. Это приводит к навязыванию решению нереального для физической задачи характера течения вблизи этой границы при $x \rightarrow L$. В действительности на любом расстоянии от кромки пластины отлично от нуля не только актуальное значение компоненты $v(x, y, t) \neq 0$, но и осредненное значение $\langle v \rangle(x, y) \neq 0$. Поэтому лучшего соответствия с экспериментом следует ожидать от решения вблизи пластины, т. е. при $x \ll L$. Автомодельное течение должно соответствовать предельному решению для $x/L \rightarrow 0$. При $x/L \rightarrow 1$ неизбежно заметное различие между результатами расчета и реальными свойствами течения. Поскольку $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$, это влияние граничного условия при $x=L$ может мало исказить профиль продольной компоненты осредненной скорости в области $x \ll L$. Влияние может быть значительным для профиля поперечной компоненты (средней и пульсационной), а также для корреляции и рейнольдсова напряжения (в [1] приведены только профили $\langle u \rangle$ и $\langle u'^2 \rangle$ для одного сечения $x/L = 0.5$).

3. Существенно предположение о распределении завихренности

$$(3.1) \quad \omega_z \equiv \omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$$

в поле течения. Следуя [1], будем считать значение $\omega = 0$ во всей области смещения, кроме точек, в которых находятся в данный момент дискретные вихри, генерируемые при распаде границы раздела. Введя функцию тока по формулам

$$u = \partial \psi / \partial y, \quad v = -\partial \psi / \partial x$$

связем с ней завихренность уравнением Пуассона

$$(3.2) \quad \Delta \psi = -\omega$$

Средняя во времени циркуляция вектора скорости в области смещения складывается из циркуляции, создаваемой граничным разрывом скорости при $x < 0$

$$\Gamma_{x < 0} = \int_{-\infty}^0 \int_{y+0}^{y-0} (u_2 - u_1) dx dy$$

и суммарной циркуляции системы из N точечных вихрей, находящихся в среднем (за время Δt) в полосе $0 < x < L$

$$\Gamma_L = N\Gamma_1 = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \int_0^L \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x, y, t) dt dx dy = (u_2 - u_1)L$$

Перейдя от циркуляции Γ к завихренности ω , сведем задачу к интегрированию уравнения Пуассона

$$(3.3) \quad \Delta \psi = (u_1 - u_2) \delta(y) \sigma(-x) + \frac{u_1 - u_2}{N} L \sum_{n=1}^N \delta[y - y_n(t)] \delta[x - x_n(t)]$$

где $\delta(z)$ и $\sigma(z)$ — символы δ -функции и единичной ступенчатой функции ($d\sigma(z)/dz = \delta(z)$), $y_n(t)$ и $x_n(t)$ — текущие координаты n -го точечного вихря ($n = 1, 2, \dots, N$). Решение уравнения (3.3) приведем без учета точечных вихрей, т. е. для стационарной задачи

$$(3.4) \quad \Delta\psi_s = (u_1 - u_2) \delta(y) \sigma(-x) \quad (\psi_s = \psi_s(x, y))$$

с граничными условиями

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \partial\psi_s / \partial y &= u_1 \text{ при } y \rightarrow +\infty, \quad \partial\psi_s / \partial y = u_2 \text{ при } y \rightarrow -\infty \\ \partial\psi_s / \partial x &= 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad \partial\psi_s / \partial x = 0 \text{ при } x = L \end{aligned}$$

Подстановкой

$$(3.6) \quad \psi_s^* = \psi_s - y \left(\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \text{sign } y \right)$$

сведем задачу к задаче Неймана с нулевыми значениями производных по нормали к границе на границах расчетной области

$$(3.7) \quad \Delta\psi_s^* = (u_1 - u_2) \delta(y) [\sigma(-x) - 1]$$

Граничные условия для уравнения (3.7)

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \partial\psi_s^* / \partial y &= 0 \text{ при } y \rightarrow \pm\infty, \quad \partial\psi_s^* / \partial x = 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ &x = L \end{aligned}$$

Функция Грина этой задачи имеет вид

$$(3.9) \quad \begin{aligned} G(x, y, x', y') &= -\frac{1}{2} \ln [(x - x')^2 + (y - y')^2] - \\ &-\frac{1}{2} \ln [(x + x' - L)^2 + (y - y')^2] \end{aligned}$$

Решения уравнения Пуассона (3.7) выражается через функцию Грина (3.9)

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \psi_s^*(x', y') &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\psi_s^* G(x, y, x', y') dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^L (u_1 - u_2) G(x, 0, x', y') dx \end{aligned}$$

получим

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \psi_s^*(x', y') &= -\frac{u_1 - u_2}{4\pi} \left\{ x' \ln(x'^2 + y'^2) - \right. \\ &- (x' - 2L) \ln[(x' - 2L)^2 + y'^2] - 4L + 2y' \left(\text{arc tg } \frac{x'}{y'} - \right. \\ &\left. \left. - \text{arc tg } \frac{x' - 2L}{y'} \right) \right\} \end{aligned}$$

При учете точечных вихрей решение полного уравнения (3.3) имеет вид

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \psi(x', y', t) &= y' \left(\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{2} \text{sign } y' \right) + \psi_s^*(x', y') + \\ &+ \frac{(u_1 - u_2)L}{4\pi N} \sum_{n=1}^N \{ \ln [(x' - x_n)^2 + (y' - y_n)^2] + \\ &+ \ln [(x' - 2L + x_n)^2 + (y' - y_n)^2] \} \end{aligned}$$

Перейдем к безразмерным переменным и параметрам, используя в качестве масштабов длины и скорости величины L и u_1

$$x^\circ = \frac{x}{L}, \quad y^\circ = \frac{y}{L}, \quad t^\circ = \frac{t}{L/u_1}, \quad u^\circ = \frac{u}{u_1}, \quad v^\circ = \frac{v}{u_1},$$

$$m = \frac{u_2}{u_1}, \quad \psi^\circ = \frac{\psi}{u_1 L}$$

(в дальнейшем градусы у безразмерных величин и штрихи у координат x' , y' опустим).

Для безразмерных компонент скорости из решения (3.12) имеем

$$(3.13) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \operatorname{sign} y - \frac{1-m}{2\pi} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-x+2}{y} \right) + \frac{1-m}{2\pi N} \sum_{n=1}^N (y-y_n) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2} + \frac{1}{(x-2+x_n)^2 + (y-y_n)^2} \right]$$

$$(3.14) \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1-m}{4\pi} \ln \frac{x^2 + y^2}{(x-2)^2 + y^2} -$$

$$- \frac{1-m}{2\pi N} \sum_{n=1}^N \left[\frac{x-x_n}{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2} + \frac{x-2+x_n}{(x-2+x_n)^2 + (y-y_n)^2} \right]$$

Эти формулы определяют нестационарное поле скоростей рассматриваемой области, если функции $x_n(t)$ и $y_n(t)$ известны.

Запишем уравнения для определения $x_n(t)$ и $y_n(t)$, т. е. уравнения движения отдельных вихрей. Для идеальной жидкости из уравнений движения следует уравнение переноса (сохранения) завихренности

$$d\omega / dt = \partial\omega / \partial t + u\partial\omega / \partial x + v\partial\omega / \partial y = 0$$

Так как для точечных вихрей

$$\omega = \sum_{s=1}^N \omega_s = c \sum_{s=1}^N \delta[x - x_s(t)] \delta[y - y_s(t)]$$

то приходим к следующему выражению:

$$\sum_{s=1}^N \delta[x - x_s(t)] \frac{\partial \delta[y - y_s(t)]}{\partial y} \left(v - \frac{dy_s}{dt} \right) +$$

$$+ \sum_{s=1}^N \delta[y - y_s(t)] \frac{\partial \delta[x - x_s(t)]}{\partial x} \left(u - \frac{dx_s}{dt} \right) = 0$$

Видно, что при $x \rightarrow x_s(t)$ и $y \rightarrow y_s(t)$

$$(3.15) \quad dx_s / dt = u(x_s, y_s, t), \quad dy_s / dt = v(x_s, y_s, t)$$

Эти равенства свидетельствуют о перемещении вихрей вместе с потоком жидкости. Координаты точечных вихрей $x_s(t)$ и $y_s(t)$ могут быть найдены из уравнений (3.15), правые части которых выражаются формулами (3.13) и (3.14) при замене x и y на x_s и y_s . (При суммировании следует опустить члены с $n = s$, чтобы не учитывать действие вихря на самого себя.)

Прежде чем перейти к описанию численного расчета по уравнениям (3.13) — (3.15), сделаем замечания о поле скорости, генерируемом стационарным вихревым полем пластины, т. е. граничным разрывом скорости при $x < 0$. Стационарной части решения (ψ_s) соответствует симметричный

относительно оси y профиль продольной компоненты скорости (со значением $u = (u_1 + u_2) / 2$ на оси). Поперечная компонента при $y = 0$ отлична от нуля в области $x < 0$. Пластина для стационарной части решения не является линией тока. Расчет показывает, что с учетом нестационарной части решения, т. е. поля скорости, индуцированного вихрями, осредненное течение практически удовлетворяет граничному условию $v = 0$ при $y = 0, x < 0$. Профиль скорости $\langle u \rangle$ приобретает характерную для рассматриваемой задачи асимметрию ($\langle u \rangle \approx 0.7u_1$ при $y = 0$ и $m = 0$).

4. Численное решение уравнений (3.13) — (3.15) проводилось на ЭВМ БЭСМ-6 для значений параметра $m = u_2 / u_1 = 0, 0.1, 0.25, 0.5$, а также $m = -0.2$. При расчете выбиралось среднее значение числа вихрей $N = 50$ и для сравнения $N = 25$ и 100 . При изменении N менялось время установления стационарного в среднем поля (примерно пропорционально числу N).

Интервал времени между вводом отдельных вихрей τ при $m > 0$ с учетом среднего времени нахождения вихря в системе $t_0 = 2 / (1 + m)$ принимался равным t_0 / N . При $m < 0$ значение определялось путем контрольного счета так, чтобы среднее число вихрей в области течения оставалось равным заданному (для $m = -0.2$ интервал $\tau \approx 1.1 t_0 / N$). В начальном состоянии N вихрей располагались по линии

$$y \approx 0 \left(x_n = \frac{n - 0.5}{N}, y_n = 0.01 \sin \left(\frac{\pi}{2} x_n \right), n = 1, 2, \dots, N \right)$$

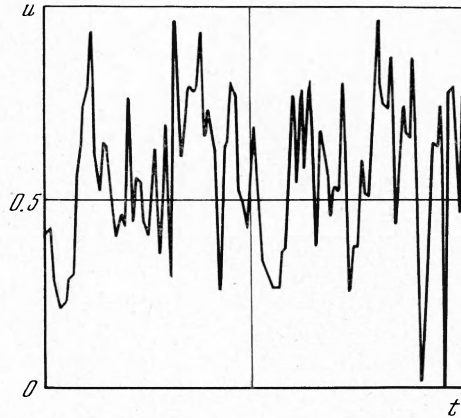
Выбор начального поля скорости не влиял на осредненное течение, так как через время $50-100 \tau$ пульсации скорости приобретают случайный характер. Это видно на примере расчетной осциллограммы продольной составляющей скорости в точке $x = 0.5, y = 0.005$ (фиг. 2, $m = 0$).

Пульсационные характеристики течения

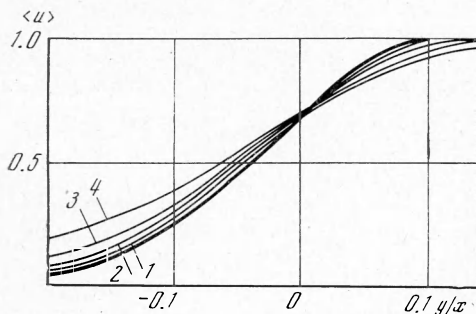
$$\begin{aligned} \sigma_u &= \langle u'^2 \rangle^{1/2}, \\ \sigma_v &= \langle v'^2 \rangle^{1/2}, \\ \langle u'v' \rangle, \\ K_{uv} &= \langle u'v' \rangle / \sigma_u \sigma_v \end{aligned}$$

за это время получают лишь приблизительно установившимися и могут быть использованы преимущественно для качественных оценок и сопоставления с экспериментом.

5. Рассмотрим вопрос об автомодельности течения для $m = 0$. На фиг. 3 представлены четыре профиля продольной компоненты $\langle u \rangle$ в расчетных сечениях $x = 0.2, 0.3, 0.4$ и 0.5 (кривые 1, 2, 3, 4) в зависимости от отношения y/x . Как видно из графика, профили $\langle u \rangle$ для различных расстояний от кромки пластины заметно различаются между собой. Раз-

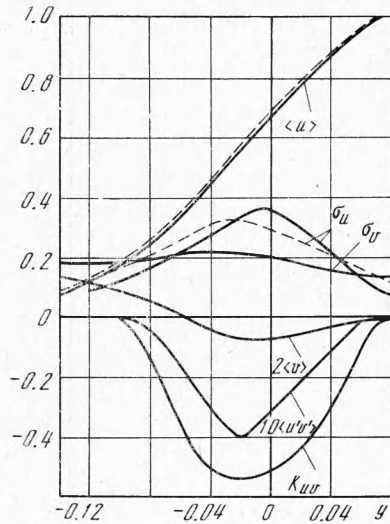


Фиг. 2

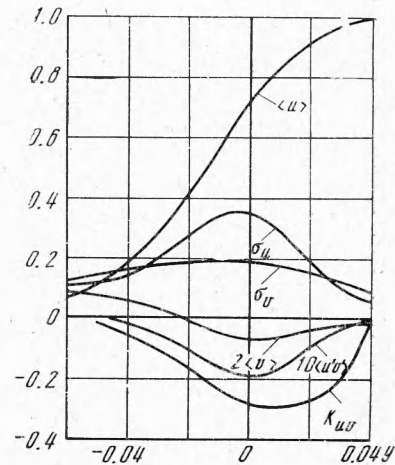


Фиг. 3

личие возрастает при увеличении x и вызвано искусственным граничным условием при $x = 1$ (см. выше). Полученные результаты допускают экстраполяцию профиля для предельного значения $x \rightarrow 0$. Автомодельный профиль скорости, показанный на фиг. 3 жирной линией, будет исполь-



Фиг. 4



Фиг. 5

зован для сравнения с результатами расчета по полуэмпирическим схемам, хорошо согласующимся с экспериментом. Выбранный с помощью экстраполяции профиль средней скорости близок к расчетному при $x = 0.2$. В этом сечении на расчете пульсаций сказывается близость к «источнику вихрей». Поэтому на последующих графиках для $m = 0$ и при обработке данных для $m \neq 0$ представлены результаты расчета для сечения $x = 0.3$ (за исключением фиг. 4, на которой сравнены результаты расчета с данными [1]).

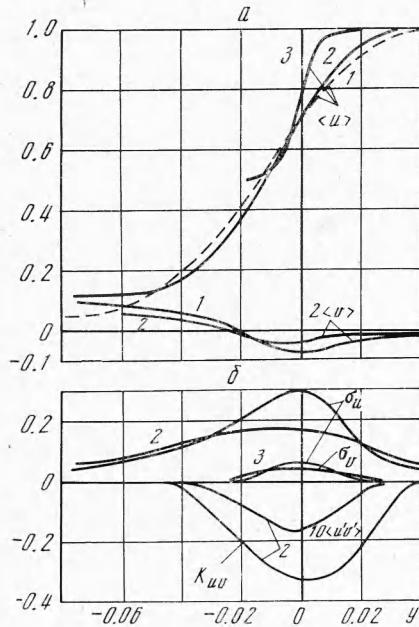
На фиг. 4 для $m = 0$ и $x = 0.5$ приведены расчетные профили осредненных и пульсационных характеристик. Пунктиром показаны результаты расчета $\langle u \rangle$ и σ_u , приведенные в работе [1] и находящиеся в согласии с полученными в данной работе. Остальные профили (поперечной компоненты $\langle v \rangle$, а также $\langle u'v' \rangle$, σ_v и K_{uv}) имеют типичный для задачи о крае струи вид и по порядку величины совпадают с опытными данными [2, 4-6]. В ходе решения нестационарной задачи возникает устойчивая корреляция между актуальными значениями u' и v' , максимальное значение $K_{uv} \approx -0.5$. Дополнительно к результатам работы [1] для края струи подтверждается возможность аналитического определения характерной для турбулентных течений величины, аналогичной рейнольдсову напряжению ($-\tau_T/\rho = \langle u'v' \rangle$), а также распределения поперечной компоненты $\langle v \rangle$ (величины порядка $10^{-2}u_1$). По порядку значений пульсаций σ_u и σ_v достигают 20–30% u_1 , что соответствует опыту.

Аналогичные профили для $x = 0.3$ представлены на фиг. 5. По характеру они схожи с кривыми для $x = 0.5$, но вследствие большей удаленности от сечения $x = 1$ ближе к автомодельным.

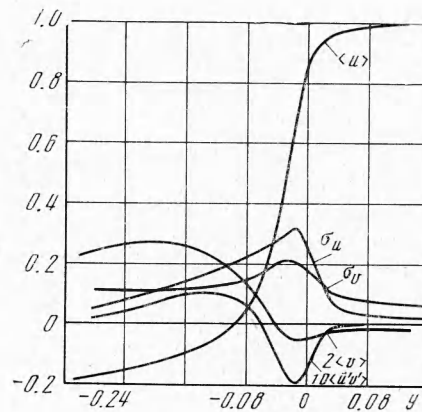
На фиг. 6 показаны профили средних (а) и пульсационных (б) характеристик для $x = 0.3$ при значениях параметра спутности $m = 0, 0.1, 0.5$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). Из графика видно, что наложение спутного потока приводит к сужению области смешения и снижению интен-

сивности пульсаций. Эти свойства характерны для реальных течений [2, 4-6], т. е. результаты расчета согласуются с экспериментом.

На фиг. 7 представлены аналогичные профили средних и пульсационных характеристик для встречного течения ($m = -0.2$, $x = 0.3$). Из решения удается получить качественно правдоподобную картину движения, согласующуюся с расчетами по полуэмпирическим схемам [2, 4, 5]. Количественное сопоставление с экспериментом для этой задачи затруд-



Фиг. 6



Фиг. 7

нено из-за отсутствия подробных опытных данных. Имеет место изменение знака $\langle u'v' \rangle$ на фиг. 7 в области перехода к встречному течению ($\langle u \rangle < 0$). Значения пульсаций при $m = -0.2$ выше, чем при $m = 0.2$, т. е. при равных абсолютных значениях m встречному течению соответствует более интенсивная турбулентность.

Для сопоставления результатов расчета с опытом целесообразно вместо различающихся между собой экспериментальных данных привлечь расчетные формулы полуэмпирических теорий. На фиг. 8 кривая 1 — расчетный профиль скорости (автомодельная кривая на фиг. 3, $m = 0$), кривая 2 — профиль скорости по методу эквивалентной задачи теории теплопроводности [7] и кривая 3 — так называемый профиль Шлихтинга [4]. (Для кривой 2

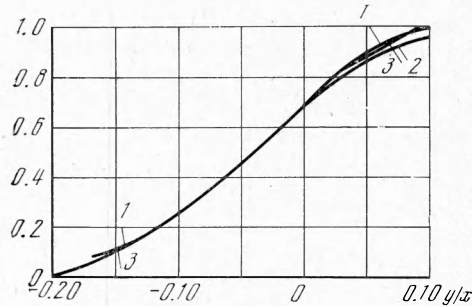
$$\langle u \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y}{ax} \right) \right]^{1/2}.$$

принято $a = 0.091$, исходя из совмещения значений y/x при $\langle u \rangle = 0.1$. Для кривой 3 $\langle u \rangle = [1 - (y_s/b)^2]^{1/2}$ для совмещения принято $\langle u \rangle = 0.7$ при $y/x = 0$ и $y_s/b = 0.29$, а также $\langle u \rangle = 0.1$ при $y/x = -0.15$ и $y_s/b = 0.77$; этому соответствует $c \approx 0.33$ в равенстве $b = cx$). Как видно из фиг. 8, расчетная и полуэмпирические кривые близки между собой; расхождения лежат в пределах обычного разброса точек.

На фиг. 9 в координатах

$$\hat{y} = \frac{\langle u \rangle - u_2}{u_1 - u_2}, \quad \hat{x} = \frac{y}{y_{1/2}}$$

где $y_{1/2}$ — координата точки, в которой $\hat{u} = 1/2$, нанесен приближенно универсальный профиль (1) $\hat{u} = f(\hat{y})$ для всех значений m ($-0.2 \leq m \leq 0.5$) и кривые 2 и 3 аналогично фиг. 8. В качестве кривой 1 взят средний профиль из распределений скорости для различных m . Кривые 2 и 3

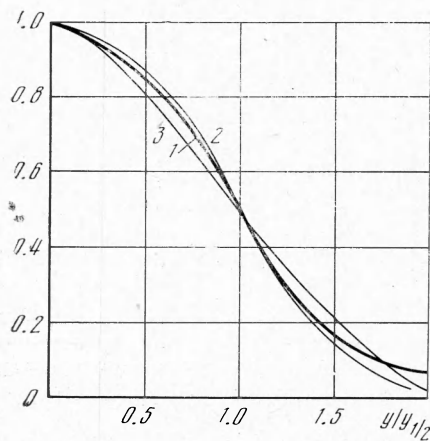


Фиг. 8

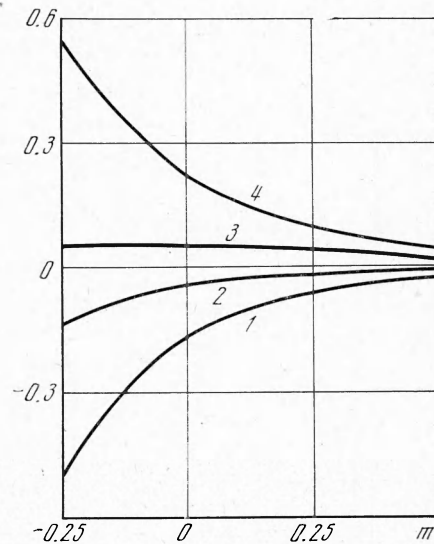
пересчитаны по выражениям, приведенным в [7], и профилю Шлихтинга.

Несмотря на условность сопоставления (совмещение кривых в точках $\hat{u} = 0.1$ и 0.7), оно свидетельствует о том, что решение, свободное от включения эмпирических постоянных, согласуется с результатами расчета по апробированным на эксперименте полуэмпирическим схемам. Решение соответствует эксперименту не только качественно, но и с известным приближением количественно.

Этот вывод можно распространить и на встречные потоки. Представляет интерес выяснить влияние параметра m на геометрию потока, т. е. на размеры и расположение (относительно линии $y = 0$) области смещения.



Фиг. 9



Фиг. 10

На фиг. 10 представлена зависимость от m геометрических характеристик течения — относительных координат y/x , соответствующих значениям $\hat{u} = 0.1, 0.5, 0.9$ (кривые 1, 2, 3) и условной толщине зоны смещения $\Delta(y/x) = (y/x)_{0.9} - (y/x)_{0.1}$ (кривая 4).

График показывает, что в спутном течении ($m > 0$) внутренняя граница потока (3) меняется незначительно, тогда как внешняя (1) заметно приближается к линии $y = 0$ с ростом m . В области $m < 0$ для встречных течений эта граница с ростом абсолютного значения m отходит от прямой $y = 0$. Толщина области смещения $\Delta(y/x)$ непрерывно падает с ростом m . График на фиг. 10 показывает, что эмпирические постоянные, вводимые в расчетные схемы [2, 4, 5], зависят от m .

6. Изложенное подтверждает применимость метода расчета, предложенного в [1], к рассматриваемому типу свободного турбулентного движения. Полученное путем аналитического решения поле осредненных характеристик течения (компонент скорости и вторых моментов) соответствует развитому турбулентному движению. Согласие решения и опыта получено из двумерной модели вихревого течения идеальной жидкости, тогда как действительное актуальное движение трехмерно. Качественно это можно объяснить тем, что в струйных турбулентных течениях, как показывает опыт [2, 6], практически равны нулю вторые моменты $\langle u'w' \rangle \approx \langle v'w' \rangle \approx 0$, содержащие пульсации компоненты скорости w по оси z . Влияние этой компоненты на осредненное движение может быть пренебрежимо малым.

Дальнейшее расширение метода работы [1] может оказаться полезным для решения некоторых задач.

Поступила 10 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kadomtsev B. B., Kostomarov D. P.* Turbulent layer in an ideal two — dimensional fluid. *Phys. Fluids*, 1972, vol. 15, No. 1, pp. 1—3.
2. *Вулис Л. А., Кашкаров В. П.* Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
3. *Карман Т.* Механическое подобие и турбулентность. В сб. «Проблемы турбулентности». М., ОНТИ, 1936.
4. *Абрамович Г. Н.* Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
5. *Гилевский А. С.* Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
6. *Хинце И. О.* Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
7. *Вулис Л. А.* К расчету турбулентного перемешивания параллельных потоков. В сб. «Турбулентные течения». М., «Наука», 1970.