

## УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ ПО ДАННЫМ ГАММА-ГАММА-МЕТОДА

А.И. Хисамутдинов<sup>1,2</sup>, Ю.А. Пахотина<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,  
630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 3, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Россия

Важной и проблемной сейчас компонентой ядерно-геофизических технологий является компьютерная инверсия данных измерений на основе уравнения переноса частиц. В работе развиты подход и итерационные методы для этой инверсии по данным измерений гамма-гамма-метода. В рамках подхода «последовательные приближения по характерным взаимодействиям» выделены типичные взаимодействия и построены итерационные методы для двух задач: задачи восстановления плотности формации и задачи восстановления пары параметров — плотности формации и толщины глинистой корки. Для исследования свойств итерационных процессов осуществлены численные эксперименты, которые подтверждают теоретические представления о сходимости методов.

*Ядерно-геофизические технологии, уравнение переноса, гамма-гамма-способ определения плотности и других параметров пласта, метод простой итерации, методы Монте-Карло, последовательные приближения по характерным взаимодействиям, математическое моделирование.*

## FORMATION EVALUATION BY INVERSION OF GAMMA-GAMMA LOGS USING PARTICLE TRANSPORT EQUATION

A.I. Khisamutdinov and Yu.A. Pakhotina

Computer inversion of measurement data based on the equation of particle transport is a topical component of the modern nuclear-geophysical technologies. In this work we have elaborated an approach and iterative methods for this inversion according to the gamma-gamma method data. In the framework of the “successive approximations by characteristic interactions” approach, typical interactions have been established and iterative methods for the solution of two problems have been elaborated, namely, the problem of evaluation of the formation density and the problem of evaluation of two parameters — the formation density and the mud cake thickness. The numerical experiments confirm the theoretical concepts of the properties of iterative processes and convergence of methods.

*Nuclear-geophysical technologies, transport equation, gamma-gamma method of evaluation of density and other parameters of rock, method of simple iteration, Monte-Carlo method, successive approximation by characteristic interactions, mathematical modeling*

## ВВЕДЕНИЕ

В процессах распространения гамма-квантов комптоновское рассеяние является доминирующим взаимодействием в сравнении с процессами фотоэлектрического поглощения и образования пар в интервалах энергий, близких 1 МэВ и ниже [Фано и др., 1963]. Это свойство широко используют в различных областях науки и технологий для определения плотности сред и связанных с нею величин. Истинным параметром является плотность электронов; через нее при наличии взаимно-однозначного соответствия восстанавливают и (массовую) плотность среды или ее компонентов. Вместе с плотностью восстанавливают также и другие сопутствующие параметры. При определении параметров применяют, как правило, приближенные подходы, приближенные методы и различные эмпирические зависимости. Например, в ядерно-геофизических технологиях исследования скважин [Филиппов, 1973; Алексеев и др., 1978; Резванов, 1982; Хисамутдинов и др., 1985] посредством гамма-гамма-каротажа часто восстанавливают пару параметров ( $\rho$ ,  $h$ ): плотность формации  $\rho$  и толщину глинистой корки  $h$ . Корка считается «мешающим» фактором. При этом используют хорошо известную сетку зависимостей (палетку) «позвоночник-ребра» [Алексеев и др., 1978], в соответствии с которой данным измерений двухзондового прибора гамма-гамма-каротажа (ГГК) сопоставляют искомую пару ( $\rho$ ,  $h$ ). Вычисления в рамках этих зависи-

мостей производят, привлекая приближенные формулы; в том числе приближаются производные по параметрам. Соответствие данного палеточного способа «стандартному» подходу с методом Ньютона было прослежено в работе [Хисамутдинов, 1980]. Аналогичным образом различные приближенные эмпирические зависимости используют и в других приложениях гамма-гамма-методов. В настоящей работе мы будем исходить из теоретических представлений о гамма-гамма-методах, опираться на математическую модель процесса переноса частиц и разовьем метод «последовательные приближения по характерным взаимодействиям» (ППХВ), метод типа простой итерации в применении к задаче о восстановлении плотности среды заданной области ( $V$ ) по данным измерений гамма-квантов от известного источника.

Проблема конструирования математической, или компьютерной, инверсии является актуальной как для многих проблем переноса частиц, так и других разделов науки, итерационные методы — один из путей ее решения [Иванов и др., 1978; Лаврентьев и др., 1980; Тихонов, Арсенин, 1986; Марчук, 1989; Кабанихин, 2009]. Для уравнения переноса в различных областях его приложения изучают разного типа обратные задачи [Марчук и др., 1976; Гермогенова, 1985; Антюфеев, Назаралиев, 1988; Марчук, 1989; McCormick, 1992]. Методы «последовательные приближения по характерным взаимодействиям» развивались в связи с ядерно-геофизическими технологиями: нейтрон-активационным каротажем, рентген-флуоресцентным анализом, импульсным нейтрон-гамма-каротажем [Хисамутдинов, Бланков, 1989; Хисамутдинов, Минбаев, 1995; Khisamutdinov, 1999; Хисамутдинов, Федорин, 2003; Khisamutdinov, Phedorin, 2009]. Для ядерно-геофизических применений типичны высокая размерность, зависимость сечений взаимодействий от энергий, многоэлементный состав сред. Все это создает трудности для анализа и решения не только обратных, но и прямых задач. При геофизическом исследовании скважин, как правило, восстанавливают параметры горной породы и ее флюидов, параметры скважинных флюидов и некоторые другие [Филиппов, 1973; Резванов, 1982; Хисамутдинов и др., 1985]. Аналогично, речь идет о восстановлении параметров горной породы и при различных лабораторных ядерно-геофизических методах или исследовании поверхностных слоев других планет.

Рассматриваем здесь несколько более общую задачу теории переноса частиц, нежели о ГКК или о задаче с плоской границей раздела [Филиппов, 1973; Резванов, 1982], но последние остаются важнейшими частными случаями описываемого. Области источника и регистрации (детекторов) частиц считаем пространственно отделенными друг от друга и располагающимися вне области ( $V$ ); нерассеянные потоки частиц не могут попасть в детектор, пересекая ( $V$ ). Говоря о регистрации, подразумеваем, что ее теоретические значения представлены в форме линейного функционала от фазовой плотности потока частиц и как среднее по траекториям случайного процесса; зависимость этого функционала от плотности  $\rho$  образует кривую плотности. Хорошо известно, что график плотности является гладкой кривой, линейен при малых  $\rho$  и экспоненциально убывает при  $\rho \rightarrow +\infty$ . Мы априори принимаем здесь эти свойства графика плотности и, соответственно, предполагаем, во-первых, что в рассматриваемом интервале энергий основным типом взаимодействий квантов со средой является комптоновское рассеяние на электронах атомов (среды) и, во-вторых, что минимальное расстояние между источником частиц и детекторами таково, что показания детекторов располагаются на ниспадающей ветви кривых плотности. Рассматриваем случаи одного и двух детекторов (зондов): «ближнего» и «дальнего». Кривая плотности дальнего спадает быстрее. Как данные измерений рассматриваем два типа: одна заданная величина и две, соответственно, этим двум типам рассматриваем две задачи о восстановлении. В задаче 1 данное является отношением показаний дальнего и ближнего детекторов. В задаче 2 одна из заданных величин — вновь отношение показаний дальнего и ближнего детекторов, а другая — показание ближнего. Построенные итерационные методы восстановления рассматриваемых параметров будут проверены и в какой-то мере изучены посредством численных экспериментов.

Макроскопическое дифференциальное сечение комптоновского рассеяния гамма-квантов содержит множителем (числовую) плотность электронов среды. Последняя, как и массовая плотность формации, является линейной функцией от (массовых) плотностей компонент, составляющих формацию. Как правило, в качестве неизвестной рассматривают либо плотность одной из компонент формации, считая остальные заданными; либо отношение объемных долей каких-либо компонент. В любом случае предполагаются взаимно-однозначные соответствия между электронной плотностью, массовой плотностью формации и искомой неизвестной. По этой причине мы не говорим об электронной плотности, а сразу формулируем задачу относительно (массовой) плотности формации. Для рассматриваемых задач характерно наличие многократных рассеяний, они отличны от проблем рентгеновской томографии и с однократным рассеянием.

Хотя в настоящей работе мы не касаемся доказательств единственности решения обратных задач и не проводим достаточно полный теоретический анализ вопросов сходимости итерационных процессов, тем не менее привлекаем модельное уравнение переноса (на прямой) для их пояснения и прояснения.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Пусть

$(X) = R^3 \times S_1 \times [0, \infty)$  — фазовое пространство координат, направлений и энергий, где  $S_1$  — сфера единичного радиуса и  $x \equiv (\mathbf{r}, \Omega, E) \in (X)$ ;

$(V_G)$  — пространственная область, в которой рассматривается перенос частиц,  $(V_G) \subset R^3$ ; в случае, в котором  $(V_G)$  не совпадает со всем пространством и является лишь его частью, мы предполагаем, что эта область выпуклая и что ее граница  $(\partial V_G)$  является кусочно-гладкой, такой, что нормаль к ней существует почти всюду;

$$(G) = (V_G) \times S_1 \times [0, \infty), (G) \subset (X);$$

$(V)$  — подобласть в  $(V_G)$ , массовая плотность  $\rho$  которой подлежит определению; как  $\rho_{at}$  обозначаем (числовую) плотность атомов в  $(V)$ . В случае наличия мешающего фактора в задаче 2 предполагается, что область  $(V)$  окружена слоем толщины  $h$  с заведомо известной плотностью;

$q_0(x)$  — плотность заданного источника гамма-квантов; предполагается что, по пространственной переменной  $r$  эта плотность отлична от нуля в некоторой ограниченной подобласти в  $(V_G)$ ;

$\Phi(x)$  — плотность (скалярного) потока частиц;

$\Sigma(x)$ ,  $\hat{S}_K^+$  и  $\hat{S}_P^+$  — полное макроскопическое сечение взаимодействий, линейные интегральные операторы процессов рассеяния и образования пар соответственно;

$I_i = \int \Phi(x) \varepsilon_i(x) dx$ ,  $i = near, far$ , — заданные линейные функционалы от  $\Phi(x)$  соответственно, где  $\varepsilon_i$  — весовые функции, характеризующие прибор.

Сразу условимся, что если область интегрирования не указывается, что уже было выше, то она совпадает со всей областью интегрирования. Для операторов  $\hat{S}_K^+$  пространственная переменная  $r \in R^3$  является параметром; через  $\hat{S}_K$  и  $\hat{S}_P$  обозначим интегральные операторы, сопряженные  $\hat{S}_K^+$  и  $\hat{S}_P^+$ . Эти пары операторов задаются соответствующими ядрами, а именно посредством макроскопических дифференциальных сечений взаимодействий:  $S(\Omega, E \rightarrow \Omega', E' | \mathbf{r})$ , которые являются обобщенными плотностями по второй паре переменных  $\Omega', E'$  и измеримыми функциями по  $\Omega, E$ . Плотность  $S_K$  описывает комптоновское рассеяние, плотность  $S_P$  дает достаточно хорошее приближенное рассмотрение процесса образования пар. Считается, что в последнем вылетают две независимые частицы, обе изотропно распределенные и с энергиями, равными массе покоя электрона. Плотность  $S_P$  содержит множителем произведение плотности  $\rho_{at}$  на зарядовое число атома, т.е.  $S_P$ , как и плотность  $S_K$ , содержит множителем электронную плотность. Положение о взаимно-однозначном соответствии между электронной и массовой плотностями имеет место и с учетом процесса образования пар. Предполагаем также, что  $\int q_0(x) dx = 1$  и что  $\forall x \in (G) \Sigma(x) \leq C_\Sigma < \infty$ . Заметим, что макроскопическое интегральное сечение  $[(\hat{S}_K + \hat{S}_P) \cdot 1](x)$  является слагаемым полного сечения  $\Sigma(x)$ .

В данной работе рассматривается случай стационарного переноса частиц. Тогда в вышеуказанном приближении уравнение переноса в интегродифференциальной форме на  $(G)$  есть:

$$(\Omega, \nabla \Phi) + \Sigma \Phi = (\hat{S}_K^+ + 2\hat{S}_P^+) \Phi + q_0. \quad (1)$$

Если  $(G)$  не совпадает с  $(X)$ , то на границе  $(\partial V_G)$  считаются поставленными стандартные «нулевые» граничные условия (отсутствие потока частиц извне). В случае неограниченной среды рассматриваются решения уравнений переноса, «стремящиеся» к 0 при  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ . Мы анализируем обобщенное решение уравнения (1), которое дается интегральной формой уравнения (1). В случае, если  $(V_G)$  не совпадает с  $R^3$ , с целью учета граничных условий для интегральной формы уравнения считается, что пространственная среда вне  $(V_G)$  заполнена абсолютно поглощающим веществом, макроскопическое сечение которого также не превышает постоянной  $C_\Sigma$ . Интегральная форма уравнения (1) на  $(X)$  есть:

$$\Phi = \hat{L}^+ \hat{S}^+ \Phi + \hat{L}^+ q_0, \quad (2)$$

где  $\hat{S}^+ \equiv \hat{S}_K^+ + 2\hat{S}_P^+$ ,  $\hat{L}^+$  — хорошо известный интегральный оператор, обратный к дифференциальному оператору в левой части уравнения (1); слагаемое  $\hat{L}^+ q_0$  в правой части (2) представляет собой поток нерассеянных частиц. Решение уравнения (2) существует единственно и может быть представлено в форме сходящегося ряда Неймана [Спанье, Гелбард, 1972; Хисамутдинов и др., 1985].

Все весовые функции  $\varepsilon_i$  в настоящей работе считаются ограниченными кусочно-непрерывными функциями, такими, что оба линейных функционала  $I_i, i = near, far$ , существуют и однозначно определены. Предполагаем, что носитель плотности  $q_0$  не пересекается с носителем функций  $\varepsilon_i$ .

С уравнением (2) связываем известную цепь Маркова  $P_W$  с весами с состояниями в  $X \cup \bar{a}$ , где  $\bar{a}$  — символ поглощающего состояния. Начальное распределение в  $P_W$  задается посредством  $q_0$ , пере-

ходы определяются полным макроскопическим сечением  $\Sigma$ , плотностями  $S_K$  и  $S_P$ . Начальный вес частиц в цепи равен 1; при осуществлении процесса «рождение пары» вес частицы удваивается.

Мы находим коэффициенты уравнения (1), а более точно, параметр  $\rho$  или совокупность двух параметров  $(\rho, h)$ , которые определяют эти коэффициенты в задачах 1 и 2 соответственно. Пусть  $\{d_{far}, d_{near}\}$  есть результаты измерений значений функций  $I_{far}, I_{near}$ . В задаче 1 параметр  $\rho$  определяется по результатам измерения отношения  $J = \frac{I_{far}}{I_{near}}$  функций от  $\rho$ , т. е. по значению отношения  $\frac{d_{far}}{d_{near}}$ , по

данным 1-го типа. В задаче 2 пару  $(\rho, h)$  определяем по данным 2-го типа, по значениям  $\frac{d_{far}}{d_{near}}$  и  $d_{near}$ .

Определение плотности среды может рассматриваться в различных петрофизических моделях, изменение  $\rho$  происходит за счет вариации разных факторов, разных компонент состава среды (см., например, [Резванов, 1982]). Ограничимся достаточно важным и относительно простым случаем, в котором однородная среда в  $(V)$  рассматривается как смесь двух (прото)однородных сред: флюида и минерального скелета. При этом считаем, что флюид полностью заполняет поры. В этом случае вариации долей и плотностей этих веществ определяют изменение плотности среды следующим образом:

$$\rho = k_p \rho_f + (1 - k_p) \rho_{ms},$$

где  $k_p$  — коэффициент пористости среды,  $\rho_f$  — плотность флюида,  $\rho_{ms}$  — плотность минерального скелета. По заданной плотности  $\rho$  любая из трех величин  $k_p$ ,  $\rho_f$  и  $\rho_{ms}$  может быть определена, если считать две остальные известными. При этом  $\forall x \in (V) \times S_1 \times [0, \infty)$  полное макроскопическое сечение  $\Sigma$ , плотности  $S_K$  и  $S_P$  являются взвешенными суммами:  $\Sigma = k_p \Sigma^{(f)} + (1 - k_p) \Sigma^{(ms)}$ ,  $S_K = k_p S_K^{(f)} + (1 - k_p) S_K^{(ms)}$ ,  $S_P = k_p S_P^{(f)} + (1 - k_p) S_P^{(ms)}$ , где верхними индексами  $(f)$  и  $(ms)$  помечены функции и плотности, относящиеся к флюиду и минеральному скелету соответственно.

Проиллюстрируем общие свойства определенных выше функционалов  $I_i, i = near, far$  как функций от  $\rho$  на известной модельной задаче (примере) о дельта-рассеивателе. Рассматриваем перенос частиц на оси  $OZ$ ,  $X = R \times \{-1, 1\}$ ,  $x = (r_3, \mu) \in X$ , где  $\mu = -1$  и  $\mu = 1$  соответствуют двум возможным направлениям движения: в отрицательном и положительном направлениях оси  $OZ$ . В качестве области  $(V)$  рассматриваем интервал  $(0, H)$ ,  $0 < H < \infty$ ; вне интервала  $(0, H)$  среда считается абсолютно поглощающей. Источник частиц сосредоточен в начале координат и испускает одну частицу в единицу времени в положительном направлении оси  $OZ$ . В качестве линейного функционала  $I$ , подлежащего измерению, в данном случае рассматриваем фазовый поток рассеянных частиц через элемент  $(H, 1)$ ,  $I = \Phi(H, 1) - \int_0^H q_0(H, 1)$ , т. е. поток частиц через правую границу интервала  $(0, H)$  за вычетом нерассеянных частиц. В этой задаче  $\forall r_3 \in (V)$  используем следующие величины:  $\sigma$  — заданное постоянное полное микроскопическое сечение взаимодействий на единицу массы;  $\rho$  — плотность атомов среды,  $0 < \rho < \rho_{max}$ ;  $c$  — вероятность выживания при взаимодействиях,  $0 < c < 1$ .

Как известно, задача о дельта-рассеивателе допускает аналитическое решение, и кривая  $I(\rho)$  определяется следующей формулой:

$$I(\rho) = e^{-(1-c)\rho\sigma H} - e^{-\rho\sigma H}.$$

Нетрудно видеть, что в окрестности нуля  $I(\rho) = c\sigma H \rho + O(\rho^2)$ , а ее асимптотическое поведение при  $\rho \rightarrow +\infty$  дается функцией  $\exp(-(1-c)\rho\sigma H)$ . Функция  $I(\rho)$  имеет только один максимум в точке  $\tilde{\rho} = \frac{-\ln(1-c)}{c\sigma H}$ , которая разделяет две ее ветви: монотонно возрастающую (на интервале  $(0, \tilde{\rho})$ ) и монотонно убывающую (на  $(\tilde{\rho}, +\infty)$ ).

## ПОСТАНОВКА ДВУХ ЗАДАЧ

Сформулируем обе рассматриваемые задачи. В обеих линейные функционалы  $I_i, i = near, far$  как функции от параметров предполагаются непрерывно дифференцируемыми. Предварительно обозначим:  $d \equiv \frac{d_{far}}{d_{near}}$ ,  $(\rho_{inv}, +\infty)$  — какой-либо заданный полубесконечный интервал, отвечающий ниспадающим ветвям кривых плотности для  $I_{far}, I_{near}$  и их отношения; а также только для задачи 2 введем функцию двух переменных  $J_2(\rho, h) = \frac{I_{far}(\rho, h)}{I_{near}(\rho, h)}$ ,  $I_{near}(\rho, h) > 0$  и вектор-функцию  $\mathbf{J}_V = \begin{pmatrix} J_2 \\ I_{near} \end{pmatrix} = (J_2, I_{near})^T$ .

В задаче 2, говоря о кривой плотности, подразумеваем график функции при фиксированном значении переменной  $h$ .

Задачу 1 формулируем как решение относительно  $\rho$  «уравнения измерений»:

$$J(\rho) - d = 0$$

или в эквивалентной форме

$$I_{far}(\rho) = d \cdot I_{near}(\rho), \quad (3)$$

считая при этом, что

- 1) неизвестное  $\rho$  принадлежит априори заданному замкнутому интервалу  $[\rho_{in}, \rho_{fin}] \subset (\rho_{inv}, +\infty)$ ;
- 2)  $J(\rho)$  является непрерывной строго монотонно убывающей на  $[\rho_{in}, \rho_{fin}]$ ;
- 3)  $d \in J([\rho_{in}, \rho_{fin}])$ .

В силу справедливости принятых допущений существует единственное решение поставленной задачи.

Задачу 2 формулируем как решение относительно  $\rho$  и  $h$  системы двух «уравнений измерений»:

$$\mathbf{J}_V(\rho, h) - (d, d_{near})^T = 0 \quad (4)$$

или в эквивалентной форме

$$\begin{cases} I_{far}(\rho, h) = d \cdot I_{near}(\rho, h) \\ I_{near}(\rho, h) = d_{near} \end{cases}, \quad (5)$$

предполагая при этом, что

- 1) неизвестные  $\rho$  и  $h$  принадлежат априори заданной замкнутой области  $[\rho_{in}, \rho_{fin}] \otimes [h_{in}, h_{fin}]$ ,  $0 \leq h_{in} \leq h_{fin}$ ;  $[\rho_{in}, \rho_{fin}] \subset (\rho_{inv}, +\infty)$ ;

- 2) вектор-функция  $\mathbf{J}_V = \begin{pmatrix} J_2 \\ I_{near} \end{pmatrix}$  осуществляет взаимно-однозначное непрерывное отображение  $[\rho_{in}, \rho_{fin}] \otimes [h_{in}, h_{fin}]$  на область значений  $\tilde{\mathcal{J}}^{(2)}$ ,  $\mathbf{J}_V : [\rho_{in}, \rho_{fin}] \otimes [h_{in}, h_{fin}] \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{(2)}$ ;

- 3)  $(d, d_{near}) \in \tilde{\mathcal{J}}^{(2)}$ .

В силу правильности принятых предположений при достаточно «небольших»  $h_{fin}$  существует единственное решение поставленной задачи 2.

Далее для уравнения (3) и системы уравнений (5) будут построены итерационные методы, являющиеся реализацией и развитием «последовательных приближений по характерным взаимодействиям» из [Хисамутдинов, 2009, 2013; Khisamutdinov, 2011, 2013].

## ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

### Построение метода ППХВ для задачи 1

Трансформируем метод ППХВ из [Хисамутдинов, 2009, 2013; Khisamutdinov, 2011] для решения уравнения (3) при трех вышесформулированных на него ограничениях. Характерными взаимодействиями в данной проблеме называем процессы комптоновского рассеяния и рождения пар в области  $(V)$ . Пусть  $\Omega_T$  — все пространство траекторий цепи Маркова  $P_W$ , соответствующее уравнениям переноса (1) и (2) [Спанье, Гелбард, 1972; Хисамутдинов и др., 1985],  $\xi(\omega)$  — какая-либо несмещенная оценка из «нулевого» класса для вычисления  $I_{far}$ ,  $M(\xi(\omega)) = I_{far}$ ,  $\omega \in \Omega_T$ ; например,  $\xi(\cdot) = \xi_1(\cdot)$ , где последняя — хорошо известная оценка «по соударениям» [Спанье, Гелбард, 1972; Хисамутдинов и др., 1985]. Разобьем  $\Omega_T$  на два подмножества:  $\Omega_e$  — множество траекторий, каждая из которых содержит хотя бы одно характерное взаимодействие,  $\Omega_{rest}$  — множество всех остальных траекторий. Далее обозначим:

$$I_e = \int_{\Omega_e} P(d\omega)\xi(\omega) \text{ и } I_{rest} = \int_{\Omega_{rest}} P(d\omega)\xi(\omega),$$

где  $P(d\omega)$  — вероятностная мера в пространстве траекторий, индуцированная цепью Маркова  $P_W$ ; введем «опорное» значение  $\rho^{(0)}$  плотности, априорно заданную величину,  $\rho^{(0)} \geq \rho_{inv}$ ; и, наконец, определим функцию характерных взаимодействий  $a(\cdot)$ :

$$a(\rho) = \frac{I_e(\rho) - I_e(\rho^{(0)})}{\rho - \rho^{(0)}}, \quad \rho^{(0)} \in (\rho_{inv}, +\infty). \quad (6)$$

Согласно свойству аддитивности математических ожиданий справедливо разложение:

$$I_{far} = I_{rest} + I_e \quad (7)$$

и, предполагая дополнительно непрерывную дифференцируемость обоих слагаемых в правой части (7), имеем, что  $a(\rho) = O(1)$  для  $\rho - \rho^{(0)} \rightarrow 0$ . В двух важнейших частных случаях: гамма-гамма-каротажа и гамма-гамма-метода на «дневной поверхности» полупространства слагаемое  $I_{rest}$  не зависит от  $\rho$ , поэтому в соответствии с теоремой Лагранжа о «конечных приращениях»

$$a(\rho) = \frac{I_{far}(\rho) - I_{far}(\rho^{(0)})}{\rho - \rho^{(0)}}, \quad a(\rho) = I'_{far}(\rho^{(0)} + \theta_\rho(\rho - \rho^{(0)})), \quad 0 < \theta_\rho < 1, \quad (8)$$

т. е.  $a(\cdot)$  является производной  $I_{far}(\cdot)$ , взятой в некоторой промежуточной точке между  $\rho^{(0)}$  и  $\rho$ . Как было выяснено в [Хисамутдинов, 2013], свойства сходимости итерационного процесса определяются близостью  $a(\cdot)$  и производной  $(I_{far} - d \cdot I_{near})'$ . Поэтому, выбирая  $\rho^{(0)}$ , можно улучшать сходимость. В общем случае подобная интерпретация функции  $a(\cdot)$  связана лишь с функцией  $I_e(\cdot)$ . Несколько позже мы запишем выражение для  $I_e(\cdot)$  в терминах теории переноса. Заметим также, что аналогичная интерпретация на основе формулы «конечных приращений» Лагранжа имеет место для элементов матрицы характерных взаимодействий в [Хисамутдинов, 2009, 2013; Khisamutdinov, 2011] при восстановлении совокупности параметров.

Теперь преобразуем уравнение измерений (3) к виду ППХВ. Представляя и обозначая  $I_{far}(\rho) = a(\rho) \cdot (\rho - \rho^{(0)}) + I_{rest}(\rho) + I_e(\rho^{(0)})$ ,  $c_z(\rho) \equiv d \cdot I_{near}(\rho) - [I_{rest}(\rho) + I_e(\rho^{(0)})]$ ,  $\check{\Phi}(\rho) \equiv c_z(\rho)/a(\rho)$ , для уравнения измерений имеем:

$$a(\rho) \cdot (\rho - \rho^{(0)}) - c_z(\rho) = 0, \quad \text{или} \quad \rho - \rho^{(0)} = \check{\Phi}(\rho), \quad a(\rho) \neq 0, \quad \rho \in [\rho_{in}, \rho_{fin}]. \quad (9)$$

А в качестве вариационной, или обобщенной, постановки задачи 1 имеем формулировку:

$$\min_{\rho} [a(\rho) \cdot (\rho - \rho^{(0)}) - c_z(\rho)]^2, \quad \rho \in [\rho_{in}, \rho_{fin}]. \quad (10)$$

Предполагаем, конечно, что остаются выполненными все ранее сформулированные ограничения.

Функции  $a(\cdot)$  и  $c_z(\cdot)$  могут вычисляться по одному набору траекторий вместе с линейными функционалами  $I_{far}$  и  $I_{near}$ . И этот факт является важной чертой метода ППХВ.

Обсудим условие  $a(\rho) \neq 0$ . Из смысла функции  $a(\cdot)$  как производной  $I_{far}(\rho)$  в промежуточных точках на строго монотонной ветви кривой плотности вытекает, что оно заведомо выполняется в двух указанных выше важных частных случаях. В общем же случае предположение о строгой монотонности соответствующей ветви  $I_e(\rho)$  является физически адекватным, а вместе с ним адекватным и условие  $a(\rho) \neq 0$ .

Как и в [Khisamutdinov, 2011; Хисамутдинов, 2013], для решения задачи (10) конструируем итерационный процесс, исходя из задачи на условный экстремум:

$$\min_{\rho_{|s}} [a(\rho_{|s-1}) \cdot (\rho_{|s} - \rho^{(0)}) - c_z(\rho_{|s-1})]^2, \quad \rho_{|s} \in [\rho_{in}, \rho_{fin}], \quad s \geq 1, \quad \rho_{|0} \in [\rho_{in}, \rho_{fin}]. \quad (11)$$

Как решение последней (задачи (11)) выписываем искомый процесс:

$$\rho_{|s} = \rho^{(0)} + \check{\Phi}(\rho_{|s-1}), \quad \text{если} \quad \rho^{(0)} + \check{\Phi}(\rho_{|s-1}) \in [\rho_{in}, \rho_{fin}], \quad (12)$$

и

$$\rho_{|s} = \rho_{in}, \quad \text{если} \quad \rho^{(0)} + \check{\Phi}(\rho_{|s-1}) < \rho_{in}, \quad (13)$$

$$\rho_{|s} = \rho_{fin}, \quad \text{если} \quad \rho^{(0)} + \check{\Phi}(\rho_{|s-1}) > \rho_{fin}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Получим выражение для среднего значения  $I_e$  в терминах теории переноса. В роли источников частиц, вносящих вклад в  $I_e$ , выступает плотность «после взаимодействий» в области  $(V)$ , равная  $\hat{S}^+ \Phi(\cdot)$ . На основе принципа двойственности, аналогично тому, что и в [Хисамутдинов, 2013], имеем:

$$I_e = \int_{(V) \otimes (S_1) \otimes [0, +\infty)} \hat{S}^+ \Phi(x) \Phi^+(x) dx, \quad (15)$$

где  $\Phi^+(x)$  — решение сопряженного уравнения переноса, интегродифференциальная форма которого на  $X$  есть

$$-(\Omega, \nabla \Phi^+) + \Sigma \Phi^+ = \hat{S} \Phi^+ + \varepsilon, \varepsilon \equiv \varepsilon_{far}, \quad (16)$$

а интегральная

$$\Phi^+ = \hat{L} \hat{S} \Phi^+ + \hat{L} \varepsilon, \quad (17)$$

где  $\hat{S}$  — сопряженный к  $\hat{S}^+$  линейный интегральный оператор, а  $\hat{L}$  — хорошо известный оператор «переноса по лучу», сопряженный к  $\hat{L}^+$ .

## ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $(\rho, h)$ В ЗАДАЧЕ 2

Сконструируем итерационный метод для решения задачи 2, для системы уравнений (5) при условии выполнения соответствующих сформулированных ограничений. В нашем случае каждый шаг итерационного процесса будет состоять из двух переходов (подшагов): сначала, согласно первому уравнению системы, будет осуществляться переход  $(\rho_s, h_s) \rightarrow (\rho_{s+1}, h_s)$ , затем в соответствии со вторым —  $(\rho_{s+1}, h_s) \rightarrow (\rho_{s+1}, h_{s+1})$ ,  $s \geq 0$ . На первом подшаге  $h_s$  является фиксированным параметром; на втором — фиксирована переменная  $\rho_{s+1}$ . Каждый первый подшаг конструируемого итерационного процесса будем выполнять посредством формул, аналогичных (12)—(14), т.е. привлекаем построенный в предыдущей подсекции метод для задачи 1. Обратимся теперь ко второму подшагу.

Параметр  $h$  не является плотностью каких-либо элементов и не вкладывается в общую схему ППХВ. Но имея в виду смысл функции  $a$  как близкой к производной функционала по параметру  $\rho$ , мы введем для реализации второго подшага «простую итерацию», используя в последней приближение к  $I_{near|h}$  в форме конечных разностей. Итак, от второго уравнения системы (5) стандартным образом переходим к уравнению:

$$h = \varphi(\rho, h, \Delta h)|_{\rho=\text{const}}, \quad (18)$$

где  $\varphi(\rho, h, \Delta h)|_{\rho=\text{const}} \equiv h - \frac{(I_{near}(\rho, h)|_{\rho=\text{const}} - d_{near}) \Delta h}{I_{near}(\rho, h + \Delta h)|_{\rho=\text{const}} - I_{near}(\rho, h)|_{\rho=\text{const}}}$ ;  $\Delta h$  — некоторое фиксированное приращение аргумента  $h$ . Далее, как уже делалось, формулируем задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} \min_h (h_{s+1} - \varphi(\rho, h_s, \Delta h)|_{\rho=\text{const}}, h_{s+1} - \varphi(\rho, h_s, \Delta h)|_{\rho=\text{const}}) \\ h_{s+1} \in [h_{in}, h_{fin}] \end{cases}, \quad s \geq 0, \quad h_0 \in [h_{in}, h_{fin}].$$

И, наконец, выпишем искомый итерационный процесс как решение последней задачи:

$$\begin{cases} h_{s+1} = \varphi(\rho, h_s, \Delta h)|_{\rho=\text{const}}, \quad \varphi(\rho, h_s, \Delta h)|_{\rho=\text{const}} \in [h_{in}, h_{fin}], \\ h_{s+1} = h_{in}, \quad \varphi(\rho, h_s, \Delta h)|_{\rho=\text{const}} < h_{in}, \\ h_{s+1} = h_{fin}, \quad \varphi(\rho, h_s, \Delta h)|_{\rho=\text{const}} > h_{fin}. \end{cases} \quad s \geq 0, \quad (19)$$

Возвращаясь к формуле (18), специально отметим, что оценка разности  $I_{near}(\rho, h + \Delta h)|_{\rho=\text{const}} - I_{near}(\rho, h)|_{\rho=\text{const}}$  производилась согласно способу «зависимые испытания» (см., например, [Фано и др., 1963; Хисамутдинов и др., 1985]). Поэтому имела место положительная корреляция при вычислении уменьшаемого и вычитаемого. Напомним, что при независимом вычислении дисперсия разности есть сумма дисперсий уменьшаемого и вычитаемого.

Запишем для определенности также формулы итерационного процесса для первого подшага. Обозначая аналогично тому, что и в задаче 1, в связи с первым уравнением системы (5):

$$I_{far}(\rho, h) = I_{rest}(\rho, h) + I_e(\rho, h), \quad a(\rho, h) = \frac{I_e(\rho, h) - I_e(\rho^{(0)}, h)}{\rho - \rho^{(0)}},$$

$$c_z(\rho, h) \equiv d \cdot I_{near}(\rho, h) - [I_{rest}(\rho, h) + I_e(\rho^{(0)}, h)], \quad (20)$$

получаем для него записи:

$$a(\rho, h) \cdot (\rho - \rho^{(0)}) - c_z(\rho, h) = 0, \quad (21)$$

$$a(\rho, h) \neq 0, (\rho, h) \in [\rho_{in}, \rho_{fin}] \otimes [h_{in}, h_{fin}].$$

Фиксируя теперь в уравнении (21) переменную  $h \in [h_{in}, h_{fin}]$  и исходя из его вариационной постановки относительно  $\rho$ , получаем формулы для каждого первого подшага в итерационном методе для задачи 2. Они есть:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{s+1} = \rho^{(0)} + \frac{c(\rho_s, h)|_{h=\text{const}}}{a(\rho_s, h)|_{h=\text{const}}}, \rho^{(0)} + \frac{c(\rho_s, h)|_{h=\text{const}}}{a(\rho_s, h)|_{h=\text{const}}} \in [\rho_{in}, \rho_{fin}], \\ \rho_{s+1} = \rho_{in}, \rho^{(0)} + \frac{c(\rho_s, h)|_{h=\text{const}}}{a(\rho_s, h)|_{h=\text{const}}} < \rho_{in}, \\ \rho_{s+1} = \rho_{fin}, \rho^{(0)} + \frac{c(\rho_s, h)|_{h=\text{const}}}{a(\rho_s, h)|_{h=\text{const}}} > \rho_{fin}. \end{array} \right. \quad s \geq 0, \quad (22)$$

### ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ ППХВ В ЗАДАЧЕ О ДЕЛЬТА-РАССЕИВАТЕЛЕ

Ограничимся примером с задачей о дельта-рассеивателе из раздела «Основные обозначения и терминология». Используя те же обозначения, что и в [Хисамутдинов, 2009; Khisamutdinov, 2011]:

$$a(\rho) \equiv \frac{I(\rho) - I(\rho^{(0)})}{\rho - \rho^{(0)}}, \quad \varphi(\rho) \equiv \rho^{(0)} + \frac{(\hat{d} - I(\rho^{(0)}))}{a(\rho)}, \quad \Delta(\rho) = a(\rho) - I'(\rho),$$

где  $\hat{d}$  — результат измерений функционала  $I$  в данной задаче, имеем как достаточное условие сжатости отображения  $\varphi(\cdot)$  в некоторой окрестности точного решения  $\rho_{ex}$  выполнение неравенства  $\sup \left| \frac{\Delta(\rho)}{a(\rho)} \right| < 1$  в какой-либо окрестности  $\rho_{ex}$ ;  $\rho_{max} > \rho_{ex} > \rho_{inv} > \tilde{\rho}$ .

Ограничиваемся лишь случаем, когда  $\rho > \rho_{inv} > \rho^* = -\frac{\ln(1-c)^2}{c\sigma H}$ , где  $\rho^*$  — точка перегиба функции  $I$ . Докажем существование окрестности, на которой при некотором сколь угодно малом положительном  $\delta$  выполнены неравенства:

$$0 < \frac{\Delta(\rho)}{a(\rho)} = 1 - \frac{I'(\rho)}{a(\rho)} < 1 - \delta, \quad (23)$$

из которых уже следует исходное неравенство достаточного условия.

На интервале  $(\rho^*, +\infty)$  функция  $I'(\rho)$ , будучи отрицательной, монотонно возрастает. Поскольку  $a(\rho) = I'(\xi)$ , где  $\xi \in (\rho^{(0)}, \rho)$ , получаем, что хотя на рассматриваемом интервале  $I'(\rho) > I'(\xi)$ , но  $\frac{I'(\rho)}{I'(\xi)} < 1$ , т. е.  $\frac{I'(\rho)}{a(\rho)} < 1$ . Из последнего следует требуемое левое неравенство в (23). Теперь сосредоточимся на правом. Поскольку  $I'(\rho)$  и  $I'(\xi) = a(\rho)$  одного знака, то  $\frac{I'(\rho)}{a(\rho)} > 0$ . Возвращаемся к начальному интервалу  $(\rho_{inv}, \rho_{max})$  и учтем, что на нем производная  $I'(\rho)$  отделена от нуля, а  $a(\rho)$  — ограниченная функция. В итоге, вводя подобающее  $\delta$ , получаем неравенство  $\frac{I'(\rho)}{a(\rho)} > \delta$  и, далее, правое в (23). Доказательство завершено.

### ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Сходимость и свойства построенных итерационных процессов наряду с некоторым теоретическим анализом изучались посредством численных экспериментов в настоящей работе и еще в нескольких других, включая [Хисамутдинов, Пахотина, 2013]. Рассматривалась горная порода, пересеченная скважиной, между которыми содержится глинистая корка в форме цилиндрического слоя. Горная порода представляет собой однородную смесь флюида ( $H_2O$ ) и минерального скелета ( $SiO_2$ ). Скважина считается заполненной водой. Внутри скважины помещался прибор, прижатый к стенке. Он представляет собой цилиндр, в котором находятся источник и два детектора, ближний и дальний, их центры расположены на расстояниях 28.74 и 50.08 см относительно источника соответственно. В качестве детекторов фигурировали цилиндры одинакового радиуса  $r_{cil} = 3.0$  см с фиксированными полувысотами:



$H_{near} = 5.08$  см,  $H_{far} = 7.62$  см. Веществом детекторов считался NaI, и рассчитывалась поглощенная ими энергия гамма-квантов. Пространство между источником и детекторами в приборе заполнено абсолютно поглощающим веществом. Как источник гамма-квантов рассматривался радиоактивный изотоп цезия  $Cs^{137}$  (с энергией испускаемых частиц 0.6 МэВ). Источник точечный и расположен на оси прибора в начале прямоугольной системы координат, ось  $OZ$  которой совпадает с осью прибора, а ось  $OX$  направлена в точку касания прибора с коркой или скважиной. В данной работе считаем, что частицы вылетают изотропно в пределах коллимационного канала, задаваемого широтным и азимутальным углами  $(\theta, \phi)$  соответствующей сферической системы координат с центром в точке  $O$ :  $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}$ . Первый угол отсчитывается от оси  $OZ$ , а второй — от  $OX$ .

Линейные функционалы  $I_{near}$ ,  $I_{far}$  и слагаемые последнего вычислялись методом Монте-Карло, используя комплекс программ NskMCNG [Банзаров, Хисамутдинов, 2010]. Относительная стандартная погрешность вычисления линейных функционалов  $I_{near}(\rho)$  (в задаче 1) и  $I_{far}$ , приводимых всюду далее, составляет 0.15—0.2 % и 1—2 % соответственно; относительная стандартная погрешность для отношения линейных функционалов не превышает 3 %; относительная стандартная погрешность для функционала  $I_{near}(\rho, h)$  (в задаче 2) — 0.7—0.8 %. Относительная стандартная погрешность вычисления  $I_e(\rho), I_{rest}(\rho)$  не превышала 2 %. Время расчета двух функционалов для каждого шага задачи 1 и для каждого из подшагов в задаче 2 с использованием  $10^9$  траекторий составляло в среднем 45 мин при применении процессора Intel Core i7-3630QM 2.4 GHz.

В обеих задачах изначально фиксировались точные значения параметров  $\rho_{ex}$  и  $(\rho_{ex}, h_{ex})$  соответственно для каждой и решалась прямая задача, в которой вычислялись линейные функционалы и их отношение  $d$ . Далее точные значения  $\rho_{ex}$  и  $(\rho_{ex}, h_{ex})$  как бы «забывались» и восстанавливались по  $d$ ,  $d_{near}$  и произвольным начальным приближениям  $\rho_0$  и  $(\rho_0, h_0)$  для каждой задачи соответственно.

В задаче 1 неизвестная плотность  $\rho$  искалась в замкнутом интервале [2.0, 2.7]. В качестве  $\rho^{(0)}$  было положено значение, взятое в середине области определения (в данном случае  $\rho^{(0)} = 2.35$ ). Было назначено, что итерационный процесс останавливается на шаге, которому соответствует минимальный

$$\text{номер } i \text{ и выполняется следующее условие: } \begin{cases} |\rho_i - \rho_{i-1}| \leq 0.01 \\ |\rho_{i+1} - \rho_i| \leq 0.01 \end{cases}, i = 1, 2, \dots$$

Результаты реализации итерационного процесса размещены на рис. 1, а.

Из приведенных численных результатов видно, что итерационный процесс сходится согласно выбранному критерию остановки за 4—5 итераций, а значение плотности входит в интервал допустимой погрешности 0.05 г/см<sup>3</sup> уже на 1—3 итерации. Также было рассмотрено начальное значение  $\rho_0 = 5.0$ , выходящее за пределы рассматриваемой области определения, и для него также наблюдалась сходимость к точному значению по истечении 14 итераций. Дополнительно подчеркнем, что наблюдаемая сходимость является монотонной и безоговорочной.

Продемонстрируем согласованность наблюдаемой в численных экспериментах сходимости с теоретическим достаточным условием. Последнее, записанное аналогично тому, что и в [Хисамутдинов, 2013], формулируется как:

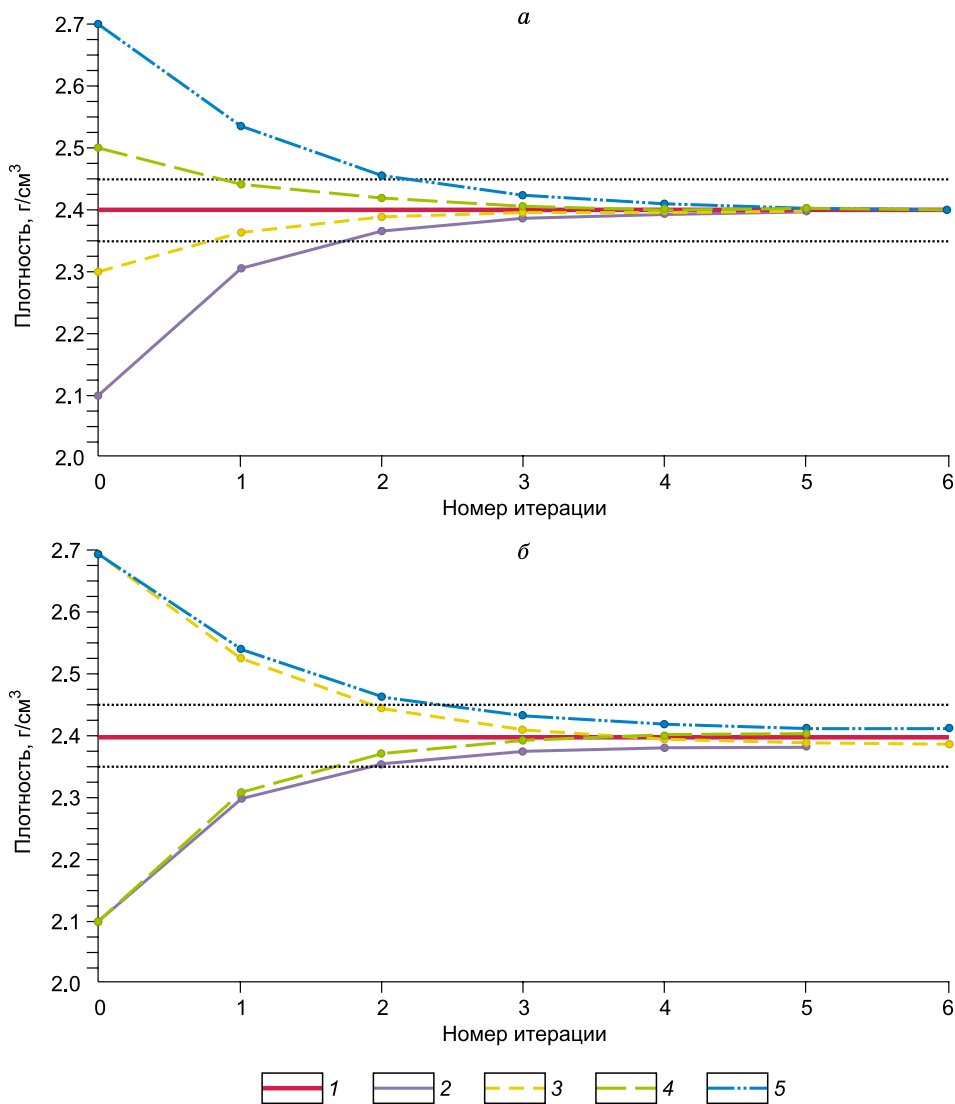
$$\sup \left| \frac{\Delta_z(\rho)}{a(\rho)} \right| < 1 \text{ в некоторой окрестности точного решения } \rho_{ex}, \text{ где } \Delta_z(\rho) \equiv c'(\rho) - a'(\rho)(\rho - \rho_0).$$

В ходе специального численного эксперимента производные  $a'(\rho)$  и  $c'(\rho)$  вычислялись приближенно по формуле отношения разностей и была получена сеточная функция  $\frac{\Delta_z(\rho)}{a(\rho)}$ . Несколько ее значений приведены ниже и демонстрируют вышеозвученную согласованность.

$\rho$	2.05	2.35	2.7
$\Delta_z/a$	5.881705E-01	7.610319E-01	8.166072E-01

Был затронут также вопрос об устойчивости метода (12)—(14). Значение результата измерений  $d^* = 0.0309333349$ , отвечающее плотности  $\rho^*$ , варьировалось на один процент (что входит в пределы допустимой погрешности измерений), рассматривались значения  $d^+ = 0.0312426682$  и  $d^- = 0.0306240015$ , которые использовались в качестве новых данных измерений. По этим данным были получены значения  $\rho^+ \approx 2.388112$  и  $\rho^- \approx 2.4104335$ , отклонения которых составляют примерно 0.50 и 0.43 % от значения  $\rho^*$  соответственно. Эти результаты приводятся на рис. 1, б. Для приращений  $\rho^+ - \rho^*$ ,  $\rho^- - \rho^*$  и  $d^+ - d^*$ ,  $d^- - d^*$  оказываются справедливыми соотношения:

$$d^+ - d^* \approx J'(d^*)(\rho^+ - \rho^*), \quad d^- - d^* \approx J'(d^*)(\rho^- - \rho^*),$$



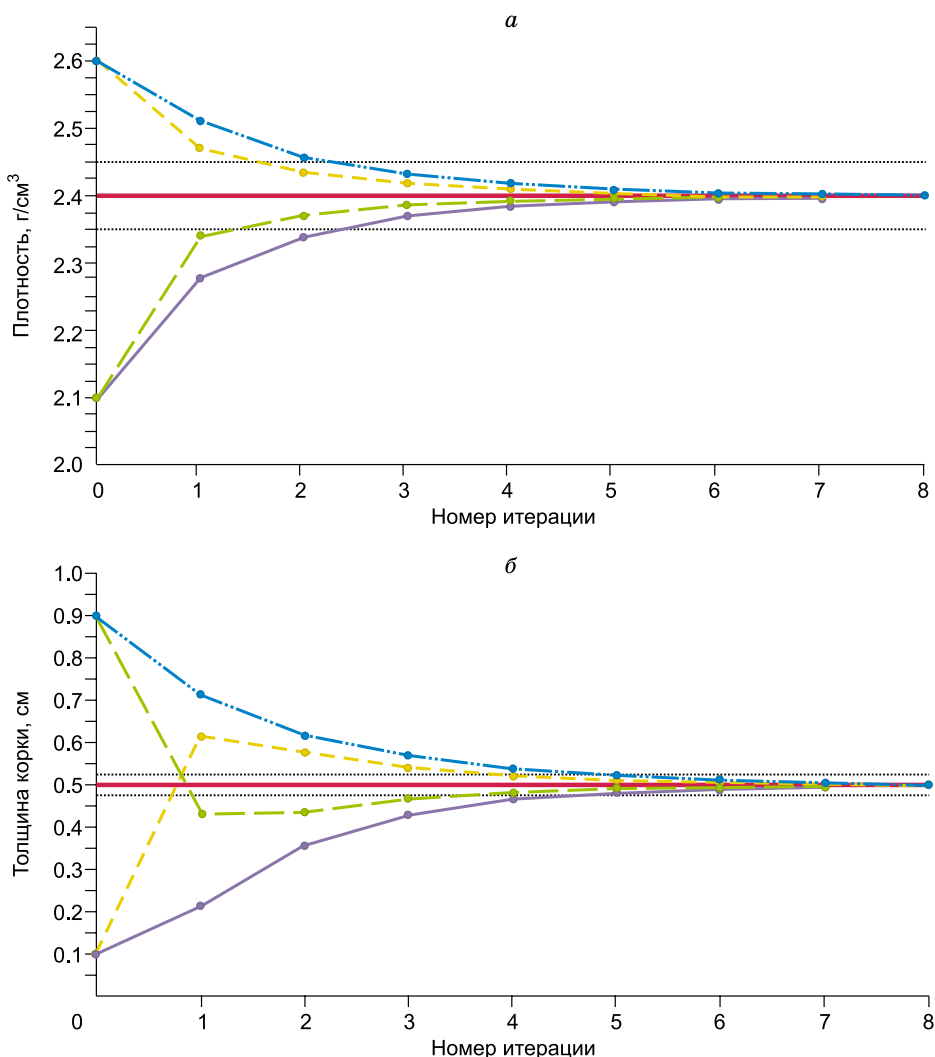
**Рис. 1. Итерационный процесс по восстановлению плотности (а) и устойчивость восстановления плотности (б) в задаче 1.**

*I* — точное значение, 2—5 — реализации итерационного процесса на каждом шаге. Пунктирные линии — погрешности, отклоняющиеся от точного значения на 2.08 %. б — 2, 3 —  $d^+$ ; 4, 5 —  $d^-$ .

где под  $J'(\rho^*)$  понимается приближенное значение производной, вычисленное по формулам конечных разностей первого порядка от функции  $J(\cdot)$ . Наличие этих соотношений позволяет в определенном смысле говорить об устойчивости метода.

В задаче 2, как и в проблеме вычисления «малых разностей» предыдущего абзаца, использовалась известная техника «зависимые испытания»; вычисления велись «по одним и тем же траекториям», а именно траектории формировались по одним и тем же последовательностям случайных чисел для корреляции величин  $I_{near}(\rho, h + \Delta h)|_{\rho=\text{const}}$  и  $I_{near}(\rho, h)|_{\rho=\text{const}}$ . В данном случае диапазон изменения плотности  $\rho$  предполагался равным  $[2.0, 2.7]$ , диапазон изменения толщины глинистой корки  $[0.0, 1.0]$ . В качестве  $\rho^{(0)}$  рассматривалась величина, взятая в середине области определения (в данном случае  $\rho^{(0)} = 2.35$ ). Значение  $\Delta h = 0.4$  см. Критерием остановки данного метода предполагалось выполнение систем следую-

щих неравенств: 
$$\begin{cases} |\rho_i - \rho_{i-1}| \leq 0.002 \\ |h_i - h_{i-1}| \leq 0.004 \end{cases}, i = 1, 2, \dots,$$
 для минимального и непосредственно следующего за ним номеров  $i$ .



**Рис. 2. Итерационный процесс по восстановлению параметров в задаче 2.**

*a* — определение плотности, *б* — определение толщины корки. 1—5 — см. на рис. 1. Пунктирные линии — погрешности, отклоняющиеся от точного значения: *a* — на 2.08 %, *б* — на 5 %

Сходимость процесса согласно выбранному критерию остановки достигается в среднем за 6—7 итераций, он входит в допустимый интервал погрешности за 4—5 итераций. Результаты проиллюстрированы на рис. 2.

Хорошая сходимость построенных итерационных процессов имела место и в численных экспериментах, выполненных ранее, в том числе в [Хисамутдинов, Пахотина, 2013]. Заметим, что в согласии с теоретическими представлениями при решении задач 1 и 2 при значении параметра  $\rho^{(0)} = 2$  в предшествующих работах потребовалось в среднем на 4 итерации больше, чем при использованном здесь  $\rho^{(0)} = 2.35$ . Отметим также, что отсутствуют какие-либо принципиальные ограничения на применение построенных методов к реалистичным проблемам.

#### ЛИТЕРАТУРА

Алексеев Ф.А., Головацкая И.В., Гулин Ю.А., Дворкин И.Л., Дядькин И.Г., Сребродольский Д.М. Ядерная геофизика при исследовании нефтяных месторождений. М., Недра, 1978, 360 с.

Антюфеев В.С., Назаралиев М.А. Обратные задачи атмосферной оптики. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1988, 156 с.

Банзаров Б.В., Хисамутдинов А.И. Novosibirsk Monte Carlo methods for Nuclear Geophysics problems. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010615224, 13.08.2010.

**Гермогенова Т.А.** Об обратных задачах атмосферной оптики // Докл. АН СССР, 1985, т. 285, № 5, с. 1091—1096.

**Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., Наука, 1978, 206 с.

**Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сиб. научное изд-во, 2009, 457 с.

**Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М., Наука, 1980, 286 с.

**Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики. М., Наука, 1989, 608 с.

**Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Карин Б.А., Елепов Б.С.** Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск, Наука, 1976, 283 с.

**Резванов Р.А.** Радиоактивные и другие неэлектрические методы исследования скважин. М., Недра, 1982, 368 с.

**Спанье Дж., Гелбард Э.** Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1972, 272 с.

**Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1986, 287 с.

**Фано У., Спенсер Л., Бергер М.** Перенос гамма-излучения. М., Госатомиздат, 1963, 284 с.

**Филиппов Е.М.** Ядерная геофизика. Новосибирск, Наука, 1973, т. 1, 514 с.; т. 2, 400 с.

**Хисамутдинов А.И.** О численной интерпретации в  $\gamma$ - $\gamma$ -каротаже // Единственность, устойчивость и методы решения обратных и некорректных задач. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1980, р. 93—99.

**Хисамутдинов А.И.** Характерные взаимодействия и последовательные приближения в двух задачах о восстановлении коэффициентов уравнений переноса (и состава среды). Новосибирск, Академ. изд-во «Гео», 2009, 48 с.

**Хисамутдинов А.И.** Характерные взаимодействия и восстановление параметров уравнения переноса и среды, включая коэффициент пористости, по данным измерений некоторых ядерно-геофизических методов // Геология и геофизика, 2013, т. 54 (9), с. 1427—1445.

**Хисамутдинов А.И., Бланков Е.Б.** Активационный каротаж на кислород, кремний и алюминий и восстановление флюида в кварц-полевошпатовых коллекторах // Докл. АН СССР, 1989, т. 309, № 3, с. 587—590.

**Хисамутдинов А.И., Минбаев М.Т.** Математическая модель и численный метод идентификации параметров нефтеводонасыщенных пластов по данным нейтронно-активационного каротажа // Геология и геофизика, 1995, т. 36, № 7, с. 73—86.

**Хисамутдинов А.И., Федорин М.А.** О численном методе для восстановления состава некоторых горных пород по данным измерений рентгенофлуоресцентного анализа // Докл. РАН, 2003, т. 392, № 1, с. 100—105.

**Хисамутдинов А.И., Пахотина Ю.А.** О компьютерном восстановлении плотности формации по данным измерений гамма-гамма метода. Новосибирск, 2013, 21 с. (Препринт/ИНГГ СО РАН; № 1).

**Хисамутдинов А.И., Стариков В.Н., Морозов А.А.** Алгоритмы Монте-Карло в ядерной геофизике. Новосибирск, Наука, 1985, 158 с.

**McCormick N.J.** Inverse radiative transfer problems: as review // Nucl. Sci. Eng., 1992, № 112, p. 185—198.

**Khisamutdinov A.I.** Numerical method of identifying parameters of oil-water saturation by nuclear logging // Appl. Radiat. Isot., 1999, v. 50, p. 615—625.

**Khisamutdinov A.I.** Characteristic interactions and successive approximations in problems on evaluating coefficients of transport equation and elemental content of a medium // J. Inverse Problems, 2011, № 2, p. 189—222.

**Khisamutdinov A.I., Phedorin M.A.** Numerical method of evaluating elemental content of oil-water saturated formations based on pulsed neutron-gamma inelastic log data // SPE J., 2009, № 3, p. 51—53.