

УДК 536.3+536.42

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В ПОЛУПРОЗРАЧНОМ СЛОЕ С ПРОЗРАЧНЫМИ ГРАНИЦАМИ\***

**Н.А. РУБЦОВ, С.Д. СЛЕПЦОВ**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск*

Проведено численное моделирование однофазной задачи Стефана в полупрозрачном слое с прозрачными для излучения границами. Показано, что при малых температурах среды справа от образца определяющую роль играет конвекция, а при высоких — излучение. Отсутствие поглощения на границах слоя приводит к ускорению нагрева пластины и существенному замедлению процессов оплавления.

### **ВВЕДЕНИЕ**

Интерес к исследованиям радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ) в полупрозрачных средах, обладающих фазовыми переходами первого рода, заметно повысился в связи с широким практическим применением (стекловарение, рост кристаллов, тепловые защиты, таяние льдов). Впервые численное моделирование однофазной задачи Стефана в слое среды с различными показателями объемного поглощения и излучения материалами проведено в работе [1]. Авторы этой работы ввели преобразование Ландау [2], позволяющее фиксировать фронт фазового перехода. Данное обстоятельство облегчает качественный анализ результатов решения, но затрудняет процесс вычисления. При этом радиационная часть задачи решалась методом дискретных ординат и направленного луча. Следуя [1], в работе [3] рассматривалась модель однофазной задачи Стефана с учетом отражения излучения от границ полупрозрачного слоя. Принципиальное отличие настоящей работы от [1] заключается в применении эффективного метода средних потоков (СП-метод) [4] для определения радиационной части уравнения энергии. Указанный метод позволил получить результаты, хорошо согласующиеся с результатами [1].

### **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ**

В настоящей работе исследуется нагрев и последующее плавление бесконечного плоскопараллельного образца с полупрозрачной поглощающей, излучающей и нерассеивающей серой средой. Первый этап решения задачи сводится к рассмотрению нестационарного РКТ в процессе нагрева образца излучением и конвекцией с граничными условиями, использованными авторами в [5]. Второй этап связан с непосредственным рассмотрением задачи Стефана, при этом используется предположение, что при достижении правой границей образца температуры плавления образующаяся здесь жидкая фаза сублимируется и уносится с помощью

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (грант № НШ – 523.2003.1).

конвекции, а положение границ раздела фаз определяется из решения краевой задачи, которая таким образом сводится к определению температурного распределения и тепловых потоков в слое твердой фазы переменной толщины от  $x = 0$  до  $x = S(t)$  (рис. 1).

В предположении постоянных теплофизических свойств среды уравнение энергии в твердой фазе пластины имеет вид

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial E}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq S(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $a$  — коэффициент температуропроводности твердой фазы,  $E$  — плотность результирующего радиационного потока (РРП) в слое серой среды, которая выражается через интенсивности излучения вперед —  $I^+(x, \mu, t)$  и назад —  $I^-(x, \mu, t)$  следующим образом:

$$E(x, t) = 2\pi \int_0^1 (I^+(x, \mu, t) - I^-(x, \mu, t)) \mu d\mu = E^+(x, t) - E^-(x, t),$$

где  $E^\pm(x, t)$  — плотность потоков полусферического (в пределах телесных углов  $\Omega = \pm 2\pi$ ) падающего излучения.

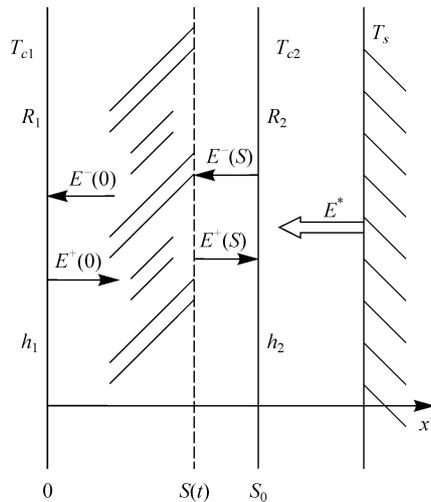
Граничные условия краевой задачи, рассматриваемой на втором этапе решения, с учетом условия Стефана на границе раздела фаз, имеют вид:

$$-\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h_1 (T_{c1} - T(0, t)), \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(S(t), t)}{\partial x} - h_2 (T_{c2} - T(S(t), t)) = \rho \gamma \frac{\partial S(t)}{\partial t}. \quad (3)$$

Здесь  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности образца,  $h_i$  — коэффициент теплообмена с внешней средой,  $T_{ci}$  — температуры среды слева и справа от образца,  $\rho$  — плотность образца,  $\gamma$  — скрытая теплота плавления, индекс  $i = 1, 2$  — левая и правая границы образца.

На первом этапе решения в уравнении энергии (1) следует полагать  $S(t)$  тождественно равной первоначальной толщине  $S_0$ , а правую сторону уравнения граничного условия (3) приравнять нулю.



При этом используются

безразмерные переменные  $\theta = \frac{T}{T_f}$ ,

$$\xi = \frac{x}{S(t)}, \quad s(\eta) = \frac{S(t)}{S_0}, \quad \eta = \frac{\lambda}{\rho c_p S_0^2} t.$$

Уравнение (1) в указанных переменных приобретает вид:

Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \xi \frac{\dot{s}}{s} \frac{\partial \theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{Ns} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (4)$$

а граничные условия (2), (3) сводятся к следующим:

$$-\frac{\partial \theta(0, \eta)}{\partial \xi} = sBi_1 (\theta_{c1} - \theta(0, \eta)) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \eta)}{\partial \xi} - sBi_2 (\theta_{c2} - \theta(1, \eta)) = \frac{\dot{s}}{St}. \quad (6)$$

Здесь  $N = \lambda/4\sigma_0 T_r^3 S_0$  — радиационно-кондуктивный параметр,  $Bi_i = h_i S_0/\lambda$  — число Био,  $St = c_p T_r/L$  — число Стефана,  $T_r = T_f$  — определяющая температура, равная температуре фазового перехода,  $\dot{s} = ds/d\eta$ . Система уравнений (4) – (6) дополняется начальными условиями вида:

$$\theta(\xi, 0) = f(\xi), \quad s(0) = 1. \quad (7)$$

При такой постановке решение задачи состоит в определении температуры  $\theta(\xi, \eta)$  и плотностей РПИ  $\Phi(\xi, \eta)$  в области  $G\{0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq \eta_1\}$ , представляющей плоский слой твердой фазы. Положение фронта фазового перехода  $s(\eta)$  будет меняться от 1 до 0.

Краевая задача (4) – (6) решается конечно-разностным методом, а нелинейная система неявных разностных уравнений — методом прогонки и итераций. Радиационные потоки в уравнениях (4) – (6) представляют собой внутренние источники и определяются из решения уравнения переноса излучения с известным распределением температуры для плоского слоя излучающей и поглощающей среды.

Применительно к радиационному теплообмену широкие возможности для расчета переноса излучения в поглощающих и излучающих средах с учетом отражения излучения от граничных поверхностей предоставляет модифицированный метод средних потоков [3, 4]. В рамках этого метода интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений для плоского слоя полупрозрачной среды. Дифференциальный аналог уравнения переноса излучения для полусферических потоков записывается в следующем виде:

$$\frac{d}{d\tau} (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) + (m^+(\tau)\Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau)\Phi^-(\tau, \eta)) = n^2 \Phi_0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\tau} (m^+(\tau)\delta^+(\tau)\Phi^+(\tau, \eta) - m^-(\tau)\delta^-(\tau)\Phi^-(\tau, \eta)) + (\Phi^+(\tau, \eta) - \Phi^-(\tau, \eta)) = 0. \quad (9)$$

Граничные условия на прозрачных диффузно излучающих и отражающих поверхностях определяются как:

$$\tau = 0, \quad \Phi^+(0, \eta) = (1 - R_1) \frac{\theta_{c1}^4}{4} + \left(1 - \frac{(1 - R_1)}{n^2}\right) \Phi^-(0, \eta), \quad (10)$$

$$\tau=1, \Phi^-(1,\eta) = (1-R_2) \left( F^* + \frac{\theta_s^4}{4} \right) + \left( 1 - \frac{(1-R_2)}{n^2} \right) \Phi^+(1,\eta), \quad (11)$$

где  $\theta_{c1}^4 = \frac{T_{c1}^4}{T_r^4}$ ,  $\theta_s^4 = \frac{T_s^4}{T_r^4}$ ,  $F^* = \frac{E^*}{4\sigma_0 T_r^4}$  — безразмерные плотности потока, падающего на пластину с правой стороны,  $n$  — коэффициент преломления,  $\sigma_0$  — постоянная Стефана — Больцмана.

В уравнениях (8) – (11):

$$\Phi^\pm(\tau,\eta) = \frac{2\pi \int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu d\mu}{4\sigma T_r^4}, \quad m^\pm(\tau) = \frac{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) d\mu}{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu d\mu}, \quad \delta^\pm(\tau) = \frac{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu^2 d\mu}{\int_{0(-1)}^{1(0)} I(\tau, \mu) \mu d\mu}.$$

Здесь  $\Phi^\pm(\tau,\eta)$  — безразмерные плотности потоков полусферического ( $\Omega = \pm 2\pi$ ) падающего излучения, а  $m^\pm$  и  $\delta^\pm$  — коэффициенты распределения интенсивности излучения по направлениям и диффузии потока в сечении  $\tau$  объема слоя, которые определяются из рекуррентного соотношения, полученного с помощью формального решения уравнения переноса излучения [6, 7],  $I$  — интенсивность излучения,  $\mu$  — косинус угла между направлением его распространения и осью  $x$ ,  $\tau = \alpha S(t)$  — оптическая толщина слоя в момент времени  $t$ ,  $R_i$  — коэффициенты полусферического отражения излучения непоглощающими границами слоя, которые вычисляются по формуле Уолша — Данкла. Плотность радиационного потока излучения определяется соотношением

$$\Phi(\tau) = \Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau). \quad (12)$$

Для решения радиационной задачи используются итерации, на каждом шаге которых краевая задача (8) – (12) решается методом матричной факторизации. Быстрая сходимость данного метода решения позволяет получать результаты с высокой степенью точности.

По указанным алгоритмам проведены численные расчеты температурных полей и радиационных потоков, а также движение фронта фазового перехода и эволюции температуры слева. Для расчетов были взяты следующие численные значения: начальная толщина  $S_0 = 0,1$  м, температура фазового перехода  $T_f = 1000$  К, температура среды слева  $T_{c1} = 300$  К°, плотность падающего потока  $E^* = 120$  кВт/м<sup>2</sup>, температура среды справа принимала значения в диапазоне  $T_{c2} = 300-900$  К; теплофизические параметры:  $\rho = 2000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 1$  Вт/(м·К),  $a = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, коэффициенты теплоотдачи  $h_{1,2} = 1$  Вт/(м<sup>2</sup>·К); оптические параметры: показатель преломления материала  $n = 1,5$ , коэффициент поглощения излучения средой образца  $\alpha = 10$  м<sup>-1</sup>, коэффициенты отражения  $R_{1,2} = 0,092$ .

### АНАЛИЗ

По результатам работы [5] были выявлены оптимальные параметры внешнего воздействия на объемно поглощающий слой с прозрачными непоглощающими границами, позволяющий осуществлять равномерный нагрев образца до момента

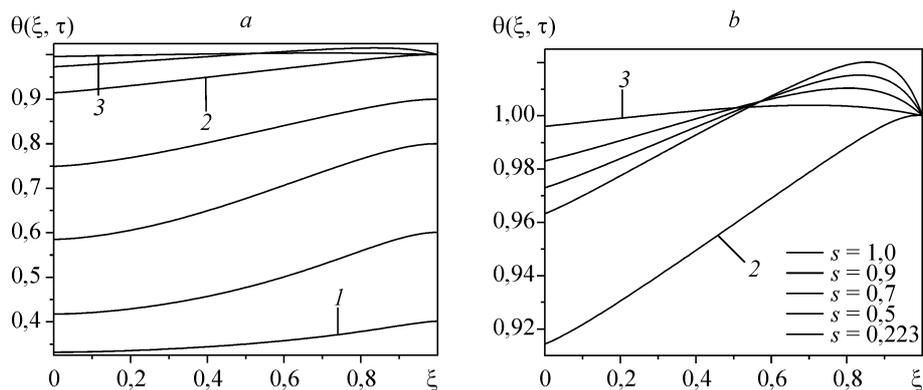


Рис. 2. Температурные поля — общее (а), во время фазового перехода (б) по всей толщине слоя при  $R_2 = 0,092$  и  $T_{c2} = 900$  К.

достижения условий фазового перехода. В настоящей работе были исследованы ситуации, в которых образец справа обтекается конвекцией при различных температурах. На рис. 2 – 4 представлены поля температур и плотностей потоков излучения всего процесса нагрева и плавления в отдельности, включая анализ фазового перехода, а также эволюцию температур левой границы образца и динамику движения фронта раздела фаз.

На рис. 2 – 3 даны графики расчетов нагрева и оплавления пластины с коэффициентами полусферического отражения излучения правой границей  $R_2 = 0,092$  и значением температуры окружающей среды  $T_{c2} = 900$  К°. В этом случае процессы осуществляются при воздействии максимального потока излучения, проникающего в пластину (потери на отражение правой границей — минимальные). Характер температурных полей в слое (см. рис. 2, а) определяется излучением и слабо зависит от температуры окружающей среды. Пластина сравнительно быстро нагревается до температуры фазового перехода на правой границе (см. рис. 2, а, кривая 2). При детальном рассмотрении температурного поля в процессе фазового перехода (см. рис. 2, б) четко просматривается зона перегрева вблизи правой границы образца, определяемая теплообменом при фиксированном значении температуры фазового перехода  $T_f$ . Максимальный перегрев наблюдается при достижении

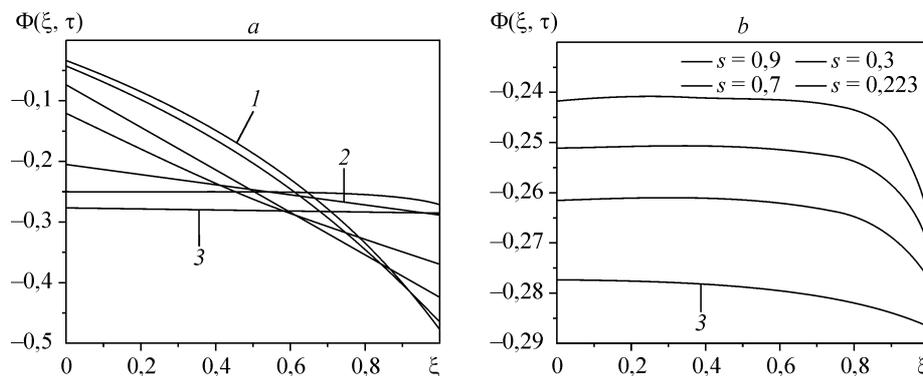


Рис. 3. Результирующие радиационные поля — общее (а), во время фазового перехода (б) по всей толщине слоя при  $R_2 = 0,092$  и  $T_{c2} = 900$  К.

Начало процесса — 55 (1); начало фазового перехода — 1003 (2); конец процесса — 30753 (3) с.

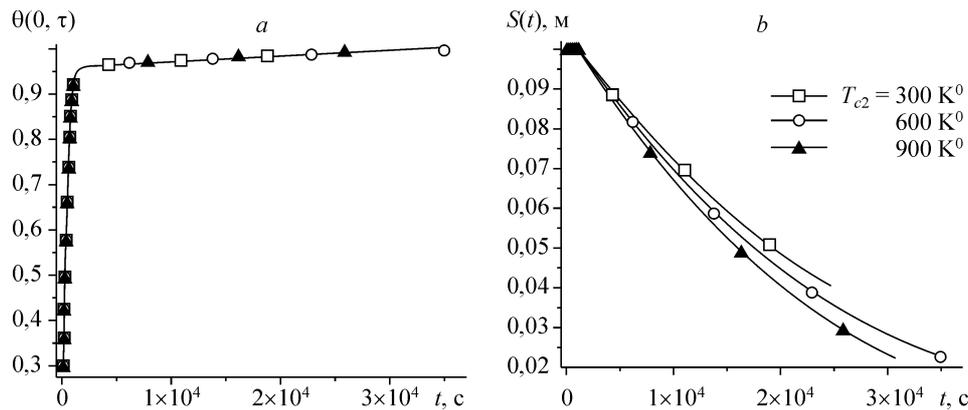


Рис. 4. Эволюция температуры на левой границе во времени (а), динамика движения правой границы образца при  $R_2 = 0,092$  во времени (б).

относительной толщины пластины  $s = 0,9$  (рис. 2, *b*). По мере оплавления пластины температурный максимум сдвигается к середине и температурное распределение в тонком слое ( $s = 0,223$ ) становится квазиизотермическим. При этом процесс оплавления оказывается растянутым во времени. Результирующие радиационные потоки (РРП), имеющие отрицательный знак, по абсолютному значению монотонно увеличивающиеся по мере удаления от правой стенки, со временем приобретают характер линейного распределения (см. рис. 3, *a*) и по мере оплавления и уменьшения толщины пластины ( $s \rightarrow 0,2$ ) становятся близкими к постоянным значениям (см. рис. 3, *a*, кривая 3). Это вызвано квазиизотермичностью тонкой пластины, остающейся на данный момент времени и обладающей малой оптической толщиной. В этом случае полный поток  $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + E$  в силу температурного распределения, близкого изотермическому, оказывается практически равным плотности потока результирующего излучения  $q \approx E$ .

Рисунок 4, *a* иллюстрирует отсутствие зависимости температуры левой границы слоя от температуры среды справа при  $T_{c1} = 300 K^0$ . Существенный рост температуры левой границы слоя отмечается в первые 1000 с процесса до начала фазового перехода, а затем кривая роста стабилизируется и выходит на квазистационарный режим. Процесс нагрева и оплавления в форме динамики движения правой границы  $S(t)$  представлен на рис. 4, *b*. Видно, что время нагрева оказывается существенно меньше времени оплавления, а общее время существования пластины увеличивается по мере снижения температуры окружающей среды.

Следует отметить, что в рассматриваемых условиях, когда границы слоя не поглощают, но пропускают излучение, возникновение фазового перехода на правой стороне слоя приводит к существенному увеличению времени оплавления образца. При этом процесс оплавления завершается при значениях безразмерной толщины слоя  $s \leq 0,2$ .

#### ВЫВОДЫ

Полученные результаты позволяют оценить роль внешних граничных условий в формировании теплового поля образца в виде плоской пластины при его нагреве и оплавлении. Показано, что при малых температурах среды справа от образца определяющую роль играет конвекция, а при высоких — излучение. Отсутствие

поглощения излучения границами пластины по сравнению с вариантами его полного поглощения, рассмотренными в [1, 3], приводит к ускорению процессов нагрева и существенному замедлению процессов оплавления.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Le Dez V., Yousefian F., Vaillon R., Lemonnier D. and Lallemand M. Problème de Stefan direct dans un milieu semitransparent gris // J. Phys. III France. — 1996. — Vol. 6. — P. 373–390.
2. Landau H.G. Heat conduction in a melting solid // Q. Appl. Math. — 1950. — Vol. 8. — P. 81–94.
3. Рубцов Н. А., Саввинова Н. А., Слепцов С. Д. Однофазная задача Стефана для полупрозрачной среды с учетом отражения излучения // Теплофизика и аэромеханика. — 2003. — Т. 10, № 2. — С. 255–264.
4. Рубцов Н.А., Тимофеев А.М., Пономарев Н.Н. О поведении коэффициентов переноса в прямых дифференциальных методах теории радиационного теплообмена в рассеивающих средах // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1987. — Вып. 5, № 18. — С. 3–8.
5. Рубцов Н. А., Слепцов С. Д. Влияние граничных условий на нестационарный радиационно-кондуктивный теплообмен в слое полупрозрачной среды // Теплофизика и аэромеханика. — 2005. — Т. 12, № 1. — С. 95–103.
6. Рубцов Н.А. Теплообмен излучением в сплошных средах. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1984. — 277 с.
7. Рубцов Н. А., Тимофеев А.М., Саввинова Н. А. Комбинированный теплообмен в полупрозрачных средах. — Новосибирск, Изд-во СО РАН, 2003. — 198 с.

*Статья поступила в редакцию 4 мая 2005 г.*