

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНОГО ТОНКОГО СЛОЯ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

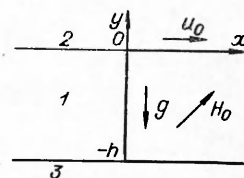
В. Г. Баштовой

(Минск)

1. Перспективы использования тонких пленок и пленочных течений намагничивающихся жидкостей в тепломассообменных аппаратах химической технологии делают необходимым исследование их устойчивости в различных магнитных полях, тем более что имеющиеся к настоящему времени исследования этого вопроса на жидкостях бесконечной глубины обнаружили специфический магнитный механизм неустойчивости свободной поверхности, а также широкие возможности управления поверхностью магнитным полем [1—5]. Фундаментальную роль в получаемых соотношениях при этом играет минимальная фазовая скорость поверхностных капиллярно-гравитационных волн $u_m^2 = 2 \sqrt{(\rho_1 - \rho_2) g \alpha / (\rho_1 + \rho_2)}$, определяющая границу устойчивости, и соответствующее ей волновое число $k_m = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2) g / \alpha}$, определяющее длину волны возмущений поверхности после потери устойчивости (ρ_1, ρ_2 — плотности граничащих жидкостей, α — коэффициент поверхностного натяжения между ними, g — ускорение земного тяготения).

Для тонких слоев жидкости условия устойчивости должны претерпеть серьезные изменения хотя бы потому, что фазовая скорость капиллярно-гравитационных волн становится другой и ограниченность слоя намагничивающейся жидкости существенным образом скажется на распределении возмущений магнитного поля внутри и вне ее. Самым непосредственным образом с данной постановкой задачи связан и вопрос о влиянии магнитных свойств сред, ограничивающих слой жидкости, на его устойчивость.

2. Задачу об устойчивости слоя намагничивающейся жидкости рассмотрим при наличии также тангенциального скоростного разрыва на его свободной поверхности. Геометрия задачи представлена на фиг. 1. неподвижный слой намагничивающейся жидкости 1 толщины h ограничен снизу ($y = -h$) плоской твердой поверхностью массива 3, а сверху ($y = 0$) движущимся вдоль свободной поверхности со скоростью u_0 потоком другой жидкости 2. Вся система находится под действием вертикального ускорения силы тяжести g и однородного магнитного поля H_0 , имеющего на бесконечности в твердом массиве компоненты H_{0x}, H_{0y}, H_{0z} . Физические характеристики сред и искомые величины в них будут иметь нижние индексы, соответствующие номерам сред.



Ф и г. 1

Рассматриваемые жидкости предполагаются несжимаемыми, вязкими и неэлектропроводными, и для всех трех сред принимаются линейные законы намагничивания $M = \chi H$ (где M — магнитный момент единицы объема среды, χ — ее магнитная восприимчивость, H — напряженность магнитного поля).

Движение намагничивающейся жидкости при сделанных выше предположениях описывается уравнениями феррогидродинамики [1—5]

$$(2.1) \quad \rho [\partial v / \partial t + (v \nabla) v] = -\nabla p + \rho g + \mu_0 M \nabla H,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H},$$

где \mathbf{v} — скорость; t — время; p — давление; μ_0, μ — магнитные проницаемости вакуума и среды; \mathbf{B} — индукция магнитного поля.

На всех границах раздела должны выполняться условия непрерывности тангенциальной составляющей напряженности и нормальной составляющей индукции магнитного поля

$$(2.2) \quad \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_j] = 0, \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_j) = 0,$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности раздела

$$(2.3) \quad \mathbf{n} = \{-q\partial F/\partial x, q, -q\partial F/\partial z\}, q \equiv [1 + (\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial z)^2]^{-1/2},$$

а $y = F(x, z)$ — уравнение этой поверхности. Кроме того, на границе раздела жидкостей должно выполняться условие равенства нормальных напряжений

$$(2.4) \quad p_i - p_j = -\frac{1}{2} \mu_0 [(M_i \mathbf{n})^2 - (M_j \mathbf{n})^2] + \alpha (R_1^{-1} + R_2^{-1}),$$

на твердой границе ($y = -h$) — равенство пулю нормальной компоненты скорости ($v_{1y} = 0$), а на свободной поверхности ($y = 0$)

$$(2.5) \quad \partial F/\partial t + \mathbf{v}_1 \nabla F = v_{1y}, \quad \partial F/\partial t + \mathbf{v}_2 \nabla F = v_{2y},$$

(R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности). За исключением граничных условий, на твердой поверхности постановка задачи такая же, как в работах [1—3].

3. Решение задачи проводится в линейном приближении (возмущения искомых величин обозначаются штрихами, а равновесные значения — нижним индексом 0).

Для потенциалов возмущений скорости $\mathbf{v}' = -\nabla \Phi$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H}' = \nabla \Phi$ система уравнений (2.1) дает

$$p' = -\rho g y' + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mu_0 M_0 \frac{\mathbf{H}_0 \mathbf{H}'}{H_0},$$

$$\Delta \Phi = 0; \Delta \Phi = 0.$$

Последние два уравнения для возмущений, периодических в плоскости (xOz), дают общие решения

$$(3.1) \quad \Phi = (D_- e^{-ky} + D_+ e^{ky}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

$$\Phi = (c_- e^{-ky} + c_+ e^{ky}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{k} = [k_x, 0, k_z]$$

(\mathbf{k} — волновой вектор, ω — частота, $\mathbf{r} = [x, y, z]$), которые с учетом необходимого затухания на бесконечности и граничных условий на твердой поверхности раздела ($y = -h$) дают для каждой из сред

$$\Phi_1 = D_1 \operatorname{ch} k(y + h) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \Phi_2 = D_2 e^{-ky} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

$$\Phi_1 = c_3 e^{-kh} [\operatorname{ch} k(y + h) + (\mu_3/\mu_1) \operatorname{sh} k(y + h)] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

$$\Phi_2 = c_2 e^{-ky} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \Phi_3 = c_3 e^{ky} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

$$F = A e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \quad H_{0x} = H_{0x1}, \quad H_{0z} = H_{0z1}, \quad (1 + \chi_3) H_{0y} = (1 + \chi_1) H_{0y1}.$$

Граничные условия (2.2)–(2.5) на свободной поверхности раздела F в линейном приближении принимают вид

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{(1 + \chi_3)(\chi_2 - \chi_1)}{(1 + \chi_1)(1 + \chi_2)} H_{0y} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{(1 + \chi_3)(\chi_2 - \chi_1)}{(1 + \chi_1)(1 + \chi_2)} H_{0y} \frac{\partial F}{\partial z} &= 0, \\ H_{0x} \frac{\partial F}{\partial x} + H_{0z} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1 + \chi_1}{\chi_2 - \chi_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{1 + \chi_2}{\chi_2 - \chi_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} &= 0, \\ H_{0x1} &= H_{0x2}, \quad H_{0z1} = H_{0z2}, \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} (1 + \chi_1) H_{0y1} &= (1 + \chi_2) H_{0y2}; \\ -(\rho_1 - \rho_2) g F + \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_2 u_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \\ + \alpha \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) + \mu_0 H_{0x} \left(\chi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \chi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) + \\ + \mu_0 H_{0z} \left(\chi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \chi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) - \mu_0 \frac{1 + \chi_3}{(1 + \chi_1)(1 + \chi_2)} H_{0y} \left[\chi_2 (1 + \chi_1) \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \right. \\ \left. - \chi_1 (1 + \chi_2) \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right] &= 0; \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + u_0 \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}.$$

Подставляя в граничные условия (3.2)–(3.4) решения (3.1) и принимая условие малости амплитуды возмущений поверхности по сравнению с их длиной волны, что позволяет граничные условия на поверхности F после выполнения всех операций дифференцирования заменить граничными условиями на плоской поверхности $y = 0$, получаем дисперсионное уравнение для поверхностных волн в виде

$$\begin{aligned} (\rho_1 - \rho_2) g + \alpha k^2 - \frac{\rho_1 \omega^2}{k \operatorname{th} kh} - \frac{\rho_2 (\omega - k_x u_0)^2}{k} + \\ + \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{\mu_2} \frac{(k H_0)^2}{k} \frac{1 + (\mu_3/\mu_1) \operatorname{th} kh}{1 + \mu_3/\mu_2 + (\mu_1/\mu_2 + \mu_3/\mu_1) \operatorname{th} kh} - \\ - \frac{\mu_3^2 (\mu_2 - \mu_1)^2}{\mu_1 \mu_2^2} \frac{H_{0y}^2 k}{1 + \mu_3/\mu_2 + (\mu_1/\mu_2 + \mu_3/\mu_1) \operatorname{th} kh} = 0, \end{aligned}$$

из которого для фазовой скорости волн $v = \omega/k$ следует выражение

$$(3.5) \quad \begin{aligned} v = \frac{\rho_2 u_0 \cos \psi}{\rho_1 / \operatorname{th} kh + \rho_2} + \left\{ \frac{(\rho_1 - \rho_2) g + \alpha k^2}{k (\rho_1 / \operatorname{th} kh + \rho_2)} - \right. \\ - \frac{\rho_1 \rho_2 u_0^2 \cos^2 \psi}{(\rho_1 / \operatorname{th} kh + \rho_2)^2 \operatorname{th} kh} - \frac{\mu_3 (\mu_2 - \mu_1)^2}{\mu_1 \mu_2^2} H_{0y}^2 \frac{1}{(\rho_1 / \operatorname{th} kh + \rho_2)} \times \\ \times \frac{\mu_3/\mu_1 + \operatorname{th} kh}{1 + \mu_3/\mu_2 + (\mu_1/\mu_2 + \mu_3/\mu_1) \operatorname{th} kh} + \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{\mu_2} H_{0\tau}^2 \times \\ \left. \times \frac{1}{(\rho_1 / \operatorname{th} kh + \rho_2)} \frac{1 + (\mu_3/\mu_1) \operatorname{th} kh}{1 + \mu_3/\mu_2 + (\mu_1/\mu_2 + \mu_3/\mu_1) \operatorname{th} kh} \cos^2 (\psi - \sigma) \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

где ψ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{u}_0 ; σ — угол между тангенциальной компонентой напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_{0\tau} = [H_{0x}, 0, H_{0z}]$ и \mathbf{u}_0 .

Изменение знака с плюса на минус в подкоренном выражении для фазовой скорости свидетельствует о наступлении неустойчивости свободной поверхности. Анализ выражения (3.5) с этой точки зрения посвящена дальнейшая часть работы.

4. Прежде всего остановимся на некоторых особенностях неустойчивости поверхности безграничного слоя ($kh \gg 1$) намагничивающейся жидкости, не отмеченных в цитированных выше работах. При отсутствии на поверхности тангенциального скоростного разрыва ($u_0 = 0$) условие неустойчивости имеет вид

$$\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 \mu_1}{(\mu_1 + \mu_2) \mu_2} H_{0y}^2 - \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1 + \mu_2} H_{0\tau}^2 \cos^2 \theta > \frac{(\rho_1 - \rho_2)g + \alpha k^2}{k}$$

($\theta = \psi - \sigma$ — угол между векторами \mathbf{k} и $\mathbf{H}_{0\tau}$), откуда следует, что при $\theta = \pi/2$ неустойчивость наступает при тех же значениях нормальной компоненты поля, что и при $\mathbf{H}_{0\tau} = 0$. Таким образом, в данной ситуации тангенциальное магнитное поле не оказывает влияния на устойчивость свободной поверхности жидкости, но существенным образом изменяет ее вид после наступления неустойчивости. Вместо структур, периодических вдоль двух направлений (ячейки) при отсутствии тангенциального поля [1], на поверхности жидкости будут наблюдаться структуры, периодические только в направлении, перпендикулярном тангенциальной компоненте поля (валы с параллельными полю осями).

Некоторые особенности имеют место и во влиянии тангенциального магнитного поля на устойчивость тангенциального скоростного разрыва. При $H_{0y} = 0$ условие его неустойчивости имеет вид

$$(4.1) \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} u_0^2 \cos^2 \psi - \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 H_{0\tau}^2}{\mu_1 + \mu_2} \cos^2 (\psi - \sigma) > \frac{(\rho_1 - \rho_2)g + \alpha k^2}{k},$$

откуда следует, что тангенциальное магнитное поле, перпендикулярное скорости потока ($\sigma = \pi/2$), не оказывает влияния на устойчивость разрыва и максимальное стабилизирующее его влияние проявляется при параллельности u_0 . При $\pi/2 > \sigma > 0$ критические значения скорости u_{0*} лежат в пределах

$$2\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g\alpha} < \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} u_{0*}^2 < 2\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g\alpha + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 H_{0\tau}^2}{\mu_1 + \mu_2}}$$

Из (4.1) также следует, что при $g = 0$, или $\alpha = 0$, или $\rho_1 = \rho_2$ и $\mathbf{H}_{0\tau} \nparallel \mathbf{u}_0$ тангенциальный скоростной разрыв абсолютно неустойчив относительно возмущений, распространяющихся перпендикулярно полю ($\psi - \sigma = \pi/2$) и являющихся длинноволновыми ($k \rightarrow 0$) при $g = 0$ или $\rho_1 = \rho_2$ и коротковолновыми ($k \rightarrow \infty$) при $\alpha = 0$. В этих случаях

$$v = \frac{\rho_2 u_0 \cos \psi}{\rho_1 + \rho_2} [1 \pm i\sqrt{\rho_1/\rho_2}].$$

И только в поле, параллельном скорости потока ($\sigma = 0$), возможен устойчивый разрыв при условии [3]

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} u_0^2 < \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\mu_1 + \mu_2} H_{0\tau}^2.$$

Рассмотрим вопрос о влиянии магнитных свойств пограничных сред и конечной толщины слоя жидкости на его устойчивость. При отсутствии скоростного разрыва ($u_0 = 0$), как следует из (3.5), наиболее опасными

являются возмущения с волновым вектором, перпендикулярным тангенциальной компоненте поля ($\psi - \sigma = \pi/2$), относительно которых условие неустойчивости слоя имеет вид

$$(4.2) \quad H_{0y}^2 \gg \frac{\mu_1 \mu_2^2}{|\mu_3 (\mu_2 - \mu_1)|^2} \frac{1 + \mu_3/\mu_2 + (\mu_1/\mu_2 + \mu_3/\mu_1) \operatorname{th} kh}{\mu_3/\mu_1 + \operatorname{th} kh} \frac{(\rho_1 - \rho_2) g + \alpha k^2}{k}.$$

Минимизацию по k правой части этого условия удобно проводить, обезразмерив k по критическому волновому числу для безграничного слоя $\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\alpha}$.

Введя $S = k/\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\alpha}$ и безразмерный критерий

$$G = \frac{\mu_3^2 (\mu_2 - \mu_1)^2}{(\mu_1 + \mu_2) \mu_1 \mu_2} \frac{H_{0y}^2}{2 \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g\alpha}},$$

определяющий начало неустойчивости, получим условие неустойчивости (4.2) в виде

$$(4.3) \quad G > \frac{1 + S^2}{2S} \frac{1 + \alpha_{32} + (\alpha_{12} + \alpha_{31}) \operatorname{th} \delta S}{(1 + \alpha_{12})(\alpha_{31} + \operatorname{th} \delta S)},$$

где $\alpha_{ih} = \mu_i/\mu_h$; $\delta = h\sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\alpha}$ — безразмерная толщина слоя.

Критические значения параметра G определяются минимумом по S правой части (4.3) и соответствуют в данном случае стационарному характеру неустойчивости ($\nu = 0$). Для безграничного слоя ($\delta \gg 1$) $G_* = 1$, $S_* = 1$. В (4.3) критические значения G_* определяются как безразмерной толщиной слоя δ , так и относительными магнитными характеристиками граничащих со слоем сред α_{ih} .

При $\delta S \ll 1$ в нулевом приближении из (4.3) следует

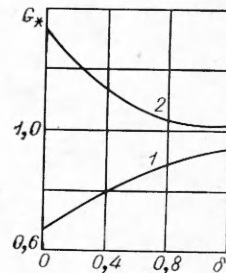
$$(4.4) \quad G_* = \frac{1 + \alpha_{23}}{1 + \alpha_{11}} = \frac{1 + \mu_2/\mu_3}{1 + \mu_2/\mu_1}, \quad S_* = 1.$$

Условие $\delta S \ll 1$ и этом превращается в $\delta \ll 1$, т. е. $h \ll \sqrt{\alpha/(\rho_1 - \rho_2)g}$.

Анализ соотношения (4.4) дает следующие результаты: $G_* > 1$ при $\mu_1 > \mu_3$; $G_* < 1$ при $\mu_1 < \mu_3$. Это свидетельствует о том, что наличие твердой пограничной среды с магнитной проницаемостью, большей, чем у жидкости, уменьшает устойчивость слоя, в обратном случае устойчивость слоя повышается.

Зависимость G_* от толщины слоя δ , рассчитанная по формуле (4.3), представлена на фиг. 2 для двух случаев разных сред, ограничивающих слой намагничивающейся жидкости. В первом случае (кривая 1) $\alpha_{31} = 1000$, $\alpha_{12} = 2$, $\alpha_{32} = 2000$, что соответствует бесконечно большой магнитной проницаемости твердого массива (среда 3), ограничивающего слой, и немагнитной жидкости (среда 2) над слоем при магнитной проницаемости слоя $\mu_1 = 2\mu_0$; во втором случае (кривая 2) $\alpha_{31} = 0,5$, $\alpha_{12} = 2$, $\alpha_{32} = 1$, что соответствует, например, слою намагничивающейся жидкости с $\mu_1 = 2\mu_0$, ограниченному немагнитными средами. С уменьшением δ в первом случае G_* уменьшается, во втором — увеличивается до значений, определяемых формулой (4.4). При $\delta > 1$ в обоих случаях G_* практически равно 1.

Критические значения волнового числа в обоих случаях изменяются с δ менее существенно, чем G_* .



Ф и г. 2

В первом случае они уменьшаются ($0,8 \leq S_* < 1$), во втором — увеличиваются ($1 < S_* \leq 1,2$) и в предельных случаях $\delta < 0,1$ и $\delta > 1$ практически равны 1.

Из (4.4) следует, что существенной стабилизации слоя намагничивающейся жидкости можно достигнуть, ограничив его сверху также намагничивающейся жидкостью с магнитной проницаемостью, много большей, чем у твердого массива. В этом случае, если $\mu_1 \approx \mu_2 \gg \mu_3$, то $G_* \sim \mu_2/\mu_3$, если же $\mu_2 \gg \mu_3$ и $\mu_2 \gg \mu_1$, то $G_* \sim \mu_1/\mu_3$.

Рассмотрим теперь стабилизирующее влияние касательного к поверхности ($H_{0y} = 0$) магнитного поля на устойчивость слоя при наличии тангенциального скоростного разрыва ($u_0 \neq 0$), которое максимальным образом проявляется при его параллельности скорости потока ($\sigma = 0$). В этом случае неустойчивость носит волновой характер и условие неустойчивости имеет вид

$$(4.5) \quad u_0^2 > \frac{(\rho_1 - \rho_2)g + \alpha k^2}{k} \frac{(\rho_1 + \rho_2 \operatorname{th} kh)}{\rho_1 \rho_2} \left\{ 1 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 H_{0\tau}^2 k}{\mu_2 [(\rho_1 - \rho_2)g + \alpha k^2]} \times \right. \\ \left. \times \frac{1 + \alpha_{31} \operatorname{th} kh}{1 + \alpha_{32} + (\alpha_{12} + \alpha_{31}) \operatorname{th} kh} \right\}.$$

Критические значения u_{0*}^2 определяются минимумом по k правой части соотношения (4.5)

$$\text{для } kh \gg 1 \quad k_* = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\alpha},$$

$$(4.6) \quad u_{0*}^2 = \frac{2(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g\alpha} \left[1 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 H_{0\tau}^2}{\mu_2 (1 + \alpha_{12}) \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g\alpha}} \right];$$

$$\text{для } kh \ll 1 \quad k_* = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\alpha},$$

$$(4.7) \quad u_{0*}^2 = \frac{2}{\rho_2} \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g\alpha} \left[1 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2 H_{0\tau}^2}{\mu_2 (1 + \alpha_{12}) \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g\alpha}} \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 + \mu_3} \right].$$

Стабилизирующее действие тангенциального магнитного поля выражается вторым членом в квадратной скобке соотношений (4.6), (4.7), из которых следует, что в двух предельных случаях глубокого и тонкого слоев намагничивающейся жидкости критическая длина волны одинакова. Ограниченность слоя твердым массивом с магнитной проницаемостью, большей, чем у жидкости ($\mu_3 > \mu_1$), уменьшает стабилизирующее действие тангенциального магнитного поля. При $\mu_1 > \mu_3$ оно увеличивается.

Таким образом, обобщая результаты рассмотренных задач, можно сделать вывод о том, что твердая граница с магнитной проницаемостью, большей, чем у намагничивающейся жидкости, оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость слоя жидкости; с другой стороны, граница с меньшей, чем у жидкости, μ стабилизирует слой.

В заключение отметим, что если для глубокого слоя намагничивающейся жидкости можно говорить о неустойчивости свободной поверхности, то для тонкого слоя эти понятия не применимы, поскольку, как показывает эксперимент, неустойчивость слоя сразу сопровождается разрывом его на отдельные конусоидальные пики, размеры, число и периодичность расположения которых зависят от величины напряженности магнитного поля. С увеличением ее происходит разделение каждого отдельно стоящего пика на два с меньшими размерами.

Поступила 8 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Cowley M. D., Rosensweig R. E. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid.— «J. Fluid. Mech.», 1967, vol. 30, N 4, p. 671—676.
2. Тарапов И. Е. Поверхностные волны и устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости.— ПМТФ, 1974, № 4, с. 35—40.
3. Тактаров Н. Г. Об устойчивости тангенциального разрыва в феррогидродинамике.— «Труды Ин-та механики МГУ», 1974, № 31, с. 194—196.
4. Баштовой В. Г., Краков М. С. О возбуждении волн на поверхности ферромагнитной жидкости бегущим магнитным полем.— «Магнит. гидродинамика», 1976, № 4.
5. Баштовой В. Г., Берковский Б. М. Термомеханика ферромагнитных жидкостей.— «Магнит. гидродинамика», 1973, № 3.

УДК 532.516

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ТЕЛА ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. А. Миронов

(Москва)

Задача оптимизации формы тела в потоке вязкой жидкости или газа рассматривалась ранее в работах [1—5]. В [1] получены необходимые условия, которым должно удовлетворять тело минимального сопротивления при обтекании его вязким газом. Работа [2] посвящена выводу необходимых условий оптимальности в случае, когда движение жидкости описывается приближенными уравнениями Стокса. В [3] найдена численно форма тела минимального сопротивления в стоксовом приближении. В работах [4, 5] получены условия оптимальности в случае, когда движение жидкости описывается уравнениями Навье—Стокса, причем в [4] эти условия распространены на случай, когда движение жидкости описывается в приближении пограничного слоя. В работе [5], кроме того, получены необходимые условия оптимальности, когда движение жидкости описывается приближенными уравнениями Озеена, а также проведен асимптотический анализ поведения оптимальной формы вблизи критических точек при произвольных числах Рейнольдса.

1. Краевая задача для определения формы тела минимального сопротивления среди тел заданного объема, сформулированная в работах [4, 5], может быть приведена к виду

$$(1.1) \quad \Delta v - \nabla p = \text{Re}(\nabla v)v, \quad \nabla v = 0, \quad (v)_S = 0, \quad (v)_\Sigma = v_\Sigma,$$

$$\Delta u - \nabla q = \text{Re}[v\nabla v - (v\nabla)u], \quad \nabla u = 0,$$

$$(u)_S = 0, \quad (u)_\Sigma = v_\Sigma, \quad (\Omega\Omega^*)_S = \text{const},$$

где v и p — соответственно поля скоростей и давлений в потоке жидкости; u и q — некоторые вспомогательные векторная и скалярная функции; S — поверхность оптимального тела; Σ — внешняя граница рассматриваемого объема жидкости, на которой задано распределение скоростей v_Σ ; $\Omega = \text{rot } v$, $\Omega^* = \text{rot } u$. Пусть поверхность тела S описывается уравнениями в параметрической форме $x_i = x_i(r, t)$. Поскольку задача оптими-