ПМТФ, № 6, 1973

УДК 534.24

УСТОЙЧИВОСТЬ ГОРЕНИЯ ПОРОХА В ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С НЕАДИАБАТИЧЕСКИМ ПЛАМЕНЕМ

Ю. А. Гостинцев, П. Ф. Похил, Л. А. Суханов

(Москва)

Получен критерий устойчивости горения пороха с учетом влияния процессов в газовой фазе. Показано, что учет эффектов неадиабатического пламени приводит к снижению запаса устойчивости горения и к уменьшению собственной частоты колебаний. Физически найденные эффекты объясняются излучением части энергии из зоны горения с тепловыми и акустическими волнами.

В [1] рассматривалась внутренняя неустойчивость стационарного горения пороха в пренебрежении эффектами, связанными с существованием пламени и наличием обратной связи между возмущениями давления p в газе и скоростью горения u_s.

Был найден критерий устойчивости горения и установлена величина собственной частоты прогретого слоя конденсированной фазы (k-фазы).

Здесь в пределах феноменологической теории нестационарного горения пороха с неадиабатическим пламенем (неадиабатичность понимается в том смысле, что имеет место поток тепла из пламени в k-фазу и тепловыделение в пламени зависит от давления [2]) анализируется устойчивость горения с учетом влияния газовой фазы. В связанной с поверхностью горения подвижной системе координат общая система описывающих процесс уравнений имеет вид [3] для k-фазы

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u_s \frac{\partial T}{\partial x} \quad (-\infty < x \leqslant 0) \tag{1}$$

$$T = T_s \quad \text{при} \quad x = 0, \quad T \to T_0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty$$

$$T = T_0 + (T_s{}^\circ - T_0)\exp(u^\circ{}_s x / \varkappa_s), \quad T_s = T_s{}^\circ, \quad u_s = u_s{}^\circ,$$

$$T_F = T_F{}^\circ \quad \text{при} \quad t = 0$$

$$u_s = u_s(p, \varphi_s), \quad T_s = T_s(p, \varphi_s) \quad (\varphi_s = (\partial T / \partial x)_{0-})$$

для газа над пламенем ($\infty > x \geqslant 0$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = \rho R T_g \tag{2}$$

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T_g}{\partial t} + u\frac{\partial T_g}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h u) = 0$$

$$T_F = T_F(p, \varphi_s), \quad h = h(p, \varphi_s),$$

$$(\rho u)_s = (\rho u)_F = \rho(u_s + u_g) \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$p = p^\circ, \quad \rho = \rho^\circ, \quad u^\circ = u_s{}^\circ + u_g{}^\circ, \quad T_g = T_F{}^\circ, \quad h = h_F{}^\circ \quad \text{при} \quad t = 0$$

При написании уравнений для газовой фазы предполагается, что за пламенем отсутствуют химические реакции и продукты химически «заморожены» (h — химическая энтальпия продуктов горения).

Пусть один из параметров, определяющих горение в газе или в k-фазе, получает малое отклонение Δ от его стационарного значения.

Исследуем устойчивость стационарного решения системы (1), (2). Введем безразмерные величины

$$\pi = p \,/\, p^\circ, \quad w = u \,/\, u^\circ, \quad \vartheta_g = T_g \,/\, T_F^\circ, \quad i_x = h \,/\, h^\circ, \quad M = u^\circ \,/\, c^\circ \; (c^{\circ 2} = \gamma p^\circ \,/\, \rho^\circ)$$

Исключая из (2) плотность, получим для возмущений линеаризованную систему уравнений в продуктах горения

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \delta\pi}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} + u^\circ \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta\vartheta_g}{\partial t} - u^\circ \frac{\partial \delta\vartheta_g}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial \delta w}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{c^{\circ 2}}{\gamma u^\circ} \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t} \delta\vartheta_g + u^\circ \frac{\partial}{\partial x} \delta\vartheta_g - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{\partial \delta\pi}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial \delta\pi}{\partial x} \right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t} \delta i_x + u^\circ \frac{\partial}{\partial x} \delta i_x = 0 \end{aligned}$$

Будем искать решение (3) в виде $\delta z_j = \Delta Z_j \exp i\omega t$. Тогда

$$(4) \qquad \begin{aligned} &u^\circ \frac{d\Pi}{dx} = \frac{i\omega M^2}{M^2 - 1} (\gamma W - \Pi), \quad u^\circ \frac{dW}{dx} = \frac{i\omega}{M^2 - 1} \left(\frac{\Pi}{\gamma} - M^2 W \right) \\ &u^\circ \frac{d\Theta}{dx} = \frac{i\omega (\gamma - 1)}{\gamma (M^2 - 1)} (M^2 \gamma W - \Pi) - i\omega\Theta, \quad u^\circ \frac{dI_x}{dx} = -i\omega I_x \end{aligned}$$

Частные решения (4) представляются волнами вида $Z_j = | Z_j | \exp k_j x$. Для определения амплитуд $| Z_j |$ и волновых векторов k_j имеем систему уравнений

$$(5) \qquad \begin{aligned} &|\Pi| \left(u^\circ k + \frac{M^2\omega}{M^2 - 1} \right) - \frac{M^2 \gamma \omega}{M^2 - 1} |w| = 0, \quad |I_x| (k u^\circ + \omega) = 0 \\ &- |\Pi| \frac{\omega}{\gamma (M^2 - 1)} + |W| \left(k u^\circ + \frac{M^2 \omega}{M^2 - 1} \right) = 0 \\ &|W| \frac{(\gamma - 1) M^2 \omega}{M^2 - 1} - |\Theta| (k u^\circ + \omega) - |\Pi| \frac{(\gamma - 1)\omega}{\gamma (M^2 - 1)} = 0 \end{aligned}$$

Разрешая характеристический определитель (5), находим

$$(6) \qquad k_1 = -\frac{\omega}{c^\circ + u^\circ}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c^\circ - u^\circ}, \quad k_3 = k_4 = -\frac{\omega}{u^\circ}$$

Здесь k_1 — волновой вектор уходящей волны, k_2 — волновой вектор падающей волны, k_3, k_4 — волновые векторы индуцированных волн температуры и химической энтальпии.

С учетом (6) общее решение (3) записывается в виде

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\delta\pi = \Delta\gamma M e^{i\omega t} (C_1 e^{ik_1 x} - C_2 e^{ik_2 x}) \\ &\delta w = \Delta e^{i\omega t} (C_1 e^{ik_1 x} + C_2 e^{ik_2 x}) \\ &\delta\vartheta_g = \Delta (\gamma - 1) M e^{i\omega t} (C_1 e^{ik_1 x} - C_2 e^{ik_2 x}) + \Delta C_3 e^{i\omega t + ik_3 x} \\ &\delta i_x = \Delta C_4 e^{i\omega t + ik_4 x} \end{aligned}$$

Поскольку падающая волна отсутствует (рассматривается только внутренняя устойчивость процесса), то $C_2 = 0$ и общее решение (7) должно содержать только уходящие от поверхности горения волны. Оно имеет вид (волна химической энтальпии выражается независимо, на устойчивость не влияет и далее не рассматривается)

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\delta\pi = \Delta\gamma M C_1 e^{i\omega t + ik_1 x}, \quad \delta w = \Delta C_1 e^{i\omega t + ik_1 x} \\ &\delta\vartheta_g = \Delta (\gamma - 1) M C_1 e^{i\omega t + ik_1 x} + \Delta C_3 e^{i\omega t + ik_3 x}. \end{aligned}$$

Введем новые безразмерные переменные, более удобные для решения системы (1), описывающей собственно горение пороха

$$\xi = \frac{u_s^\circ}{\varkappa_s} x, \quad \tau = \frac{u_s^{\circ 2}}{\varkappa_s} t, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_s^\circ - T_0}, \quad v = \frac{u_s}{u_s^\circ}, \quad \Omega = \frac{\varkappa_s}{u_s^{\circ 2}} \omega$$

$$\zeta_{1,2,3} = \frac{\varkappa_s}{u_s^\circ} k_{1,2,3}, \quad \varphi = \frac{\varphi_s}{\varphi_s^\circ}$$

Тогда (8) примет вид

$$\delta\pi = \Delta |\Pi| e^{i\Omega\tau + i\zeta_1\xi} \quad (|\Pi| = \gamma M C_1) \tag{9}$$

$$\delta w = \frac{\Delta |\Pi|}{\gamma M} e^{i\Omega\tau + i\zeta_1\xi}$$

$$\delta\vartheta_g = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \delta\pi + \Delta C_3 e^{i\Omega\tau + i\zeta_3\xi}$$

Линеаризуя (1), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\delta\vartheta - \frac{\partial}{\partial\xi}\delta\vartheta - \frac{\partial}{\partial\tau}\delta\vartheta = e^{\xi}\delta v \tag{10}$$

$$\delta\vartheta(\xi \to \infty) = 0, \quad \delta\vartheta(\xi = 0, \tau) = \delta\vartheta_s, \quad \delta\vartheta(\xi, \tau = 0) = 0$$

$$\delta\vartheta_s = \left(\frac{\partial\vartheta_s}{\partial\pi}\right)_\varphi \delta\pi + \left(\frac{\partial\vartheta_s}{\partial\varphi}\right)_\pi \delta\varphi$$

$$\delta\vartheta_F = \left(\frac{\partial\vartheta_F}{\partial\pi}\right)_\varphi \delta\pi + \left(\frac{\partial\vartheta_F}{\partial\varphi}\right)_\pi \delta\varphi$$

$$\delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial\pi}\right)_\varphi \delta\pi + \left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)_\pi \delta\varphi$$

Так как давление на поверхности горения изменяется по закону $\delta\pi \sim$ $\sim \exp i\Omega\tau$, то решения (10) следует искать среди функций такого же вида. Согласно [2] для комплексных амплитуд можно найти

$$V = V_1 |\Pi|, \quad V_1 = \frac{\nu + \delta(\alpha - 1)}{1 - k + (\alpha - 1)(r - ik/\Omega)} \tag{11}$$

$$\varepsilon\Theta_F = |\Pi| \left(s - \nu\frac{q}{k} + \frac{q}{k} V_1\right), \quad \alpha = {}^1/_2 (1 + \sqrt{1 + 4i\Omega})$$

Здесь

$$\nu = \left(\frac{\partial \ln u_s^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0}, \quad k = (T_s^\circ - T_0)\left(\frac{\partial \ln u_s^\circ}{\partial T_0}\right)_p, \quad r = \left(\frac{\partial T_s^\circ}{\partial T_0}\right)_p$$

$$\mu = \left(\frac{\partial T_s^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0} (T_s^\circ - T_0)^{-1}, \quad s = \left(\frac{\partial \ln T_F^\circ}{\partial \ln p}\right)_{T_0},$$

$$q = (T_s^\circ - T_0)\left(\frac{\partial \ln T_F^\circ}{\partial T_0}\right)_p$$

$$\delta = \nu r - \mu k, \quad \varepsilon = (T_s^\circ - T_0) / T_F^\circ$$

Параметры ν, k, r, μ, s, q, δ определяют свойства реакционных зон в пламени в k-фазе пороха.

Постоянные $|\Pi|$ и C_3 в (9) и (11) находятся из условия «сшивки» решений на пламени

$$\delta\vartheta_g = \delta\vartheta_F, \quad \delta w_F = \delta w_g$$

С учетом уравнений состояния и сохранения массы найдем

$$|\Pi| \left(1 - \nu\frac{q}{k} + \frac{q}{k} V_1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) - C_3 = 0 \tag{12}$$

$$|\Pi| \left[V_1 \left(1 + \frac{q}{k}\right) + s - \nu\frac{q}{k} - 1 - \frac{1}{\gamma M}\right] = 0$$

Из (12) следует характеристическое уравнение:

$$\begin{bmatrix} s - \nu \frac{q}{k} + \frac{q}{k} V_1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}, & -1 \\ V_1 \left(1 + \frac{q}{k}\right) + s - \nu \frac{q}{k} - 1 - \frac{1}{\gamma M}, & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Используя выражение для V_1 из (11), найдем отсюда

(13) $$\left(1 - s + \nu \frac{q}{k} + \frac{1}{\gamma M}\right) \frac{1}{1 + q/k} - \frac{\nu + \delta (\alpha - 1)}{1 - k + (\alpha - 1)(r - ik/\Omega)}$$

Поскольку $\Omega = \mathrm{Re}\,\Omega + i \mathrm{Im}\,\Omega$, а решение задачи, искалось в виде $\sim \exp i\Omega\tau = \exp [i (\mathrm{Re}\Omega)\tau - (\mathrm{Im}\,\Omega)\,\tau]$, то условие устойчивости горения равносильно выполнению неравенства $\mathrm{Im}\Omega \geqslant 0$.

Исследуем характеристическое уравнение (13).

Обозначая

$$\sigma = i\Omega \quad (\alpha = {}^1/_2 (1 + \sqrt{1 + 4\sigma})), \quad a_1 = (1 - k)\, a_0 - \nu\gamma M$$
$$a_2 = r a_0 - \delta\gamma M, \ a_3 = a_0 k, \ a_0 = [1 + \gamma M (1 - s + \nu q / k)]\, k\, /$$
$$/\, (k + q)$$

перепишем (13) в форме

(14) $$(\sqrt{1 + 4\sigma} - 1)(a_2 / a_3 + 1 / \sigma) = -2a_1 / a_3$$

Величина σ в уравнении (14) в общем случае комплексная ($\sigma = x + iy$) (x, y — вещественные числа), поэтому (14) можно привести к виду

(15) $$a_2^2\sigma^2 + \sigma (2a_2a_3 + a_1a_3 - a_1^2) + a_3^2 + a_1a_3 = 0$$

После разделения действительной и мнимой частей из (15) найдем

(16) $$x = a_2^2 / 2 (2a_2a_3 + a_1a_2 - a_1^2)$$

(17) $$a_2^2y^2 = a_3^2 + a_1a_3 - a_2^2 (2a_2a_3 + a_1a_2 - a_1^2)^2 / 4$$

По определению значение y вещественное. Найдем область параметров, где это требование выполнено. Для этого рассмотрим знак неравенства $(a_3^2 + a_1a_3) - a_2^2 (2a_2a_3 + a_1a_2 - a_1^2)\, {}^2/4$. Если оно больше нуля, то y — вещественное число, в противном случае — чисто мнимое.

Анализ показывает, что левая часть неравенства отрицательна, если

(18) $$(1 - k) \frac{k}{k + q} \left[\left(1 - s + \nu \frac{q}{k}\right) \gamma M + 1\right] - \nu\gamma M \geqslant 0$$

или

$$k \leqslant 1 - \frac{\nu (1 + k) \gamma M}{(1 - s) \gamma M + 1} = k_0$$

Таким образом, в области $k < k_0$ характеристическое уравнение (14) не имеет комплексных корней и y — чисто мнимое число, что противоречит его определению. Поэтому в области $k < k_0$ либо корни характеристического уравнения вещественны, либо корней совсем нет. Полагая σ вещественным и положительным (физически это соответствует определению σ как частоты возмущений), рассмотрим решения (14) в области $k < k_0$.

Запишем

$$\frac{a_1}{a_3}=\frac{k+q}{k^2}\left\{\frac{k(1-k)}{k+q}\left[\left(1-s+\nu\frac{q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\nu\gamma M\right\}\times$$
$$\times\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]^{-1}$$
$$\frac{a_2}{a_3}=\left\{\frac{rk}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\delta\gamma M\right\}\times$$
$$\times\frac{(k+q)}{k^2}\left[\left(1+s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]^{-1}$$

Видно, что левая часть (14) при $k<k_0$ отрицательна ($a_1/a_3>0$ в силу (18) и положительности знаменателя). Правая часть (14) всегда положительна, если выполняется неравенство $k>\nu r-r/\gamma M-(1-s)r-\mu k=k_0'$.

При допустимых значениях параметров величина k_0' всегда отрицательна и, следовательно, в области значений $k_0'<k<k_0$ правая и левая части характеристического уравнения имеют противоположные знаки, что означает отсутствие действительных корней.

Таким образом, при $k<k_0$ уравнение (14) не имеет корней и горение устойчиво. При этом критерий устойчивости принимает вид

$$k<k_0=1-\nu(1+q)\gamma M/[1+(1-s)\gamma M] \tag{19}$$

Исследуем теперь решение характеристического уравнения (14) в комплексной области ($k>k_0$)

$$\sigma=(i\Omega)_{1,2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2-\frac{a_1}{a_2}-2\frac{a_3}{a_2}\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{\left[\frac{a_1}{a_2}+2\frac{a_3}{a_2}-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2\right]^2-\frac{4(a_3^2+a_1a_3)}{a_2^2}}\right\} \tag{20}$$

В соответствии с определением устойчивости ($\operatorname{Im}\Omega\geqslant 0$) получим критерий

$$(a_1/a_2)^2-a_1/a_2-2a_3/a_2\leqslant 0$$

Так как в обычных условиях $a_2>0$, то $a_1^2/a_2-a_1-2a_3\leqslant 0$.

Подставляя сюда значения a_0, a_1, a_2, a_3, можно найти условие устойчивости при $k>k_0$. Окончательно критерий устойчивого горения пороха с учетом влияния газовой фазы записывается в форме при

$$k<1-\nu(1+q)\gamma M\,[(1-s)\gamma M+1]^{-1}=k_0$$

горение устойчиво всегда, а при $k>k_0$ горение устойчиво, только если

$$r\frac{k}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\delta\gamma M\geqslant$$
$$\geqslant\left\{(1-k)\frac{k}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\nu\gamma M\right\}^2\times$$
$$\times\left[\frac{(1+k)k}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\nu\gamma M\right]^{-1} \tag{21}$$

Из (20) можно определить собственную частоту тепловых колебаний зоны горения пороха на пределе устойчивости

$$\Omega^*=\left\{\frac{r}{k+q}\left[\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M+1\right]-\delta\gamma M\right\}^{-1}\times \tag{22}$$
$$\times\sqrt{(k+q)^{-1}\left[1+\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M\right]\left\{\frac{k}{k+q}\left[1+\left(1-s+\frac{\nu q}{k}\right)\gamma M\right]-\nu\gamma M\right\}}$$

При горении порохов в обычных условиях число Маха мало, поэтому разлагая (19), (21) и (22) в ряд по γM, найдем, что горение устойчиво